疑似逆行列演習

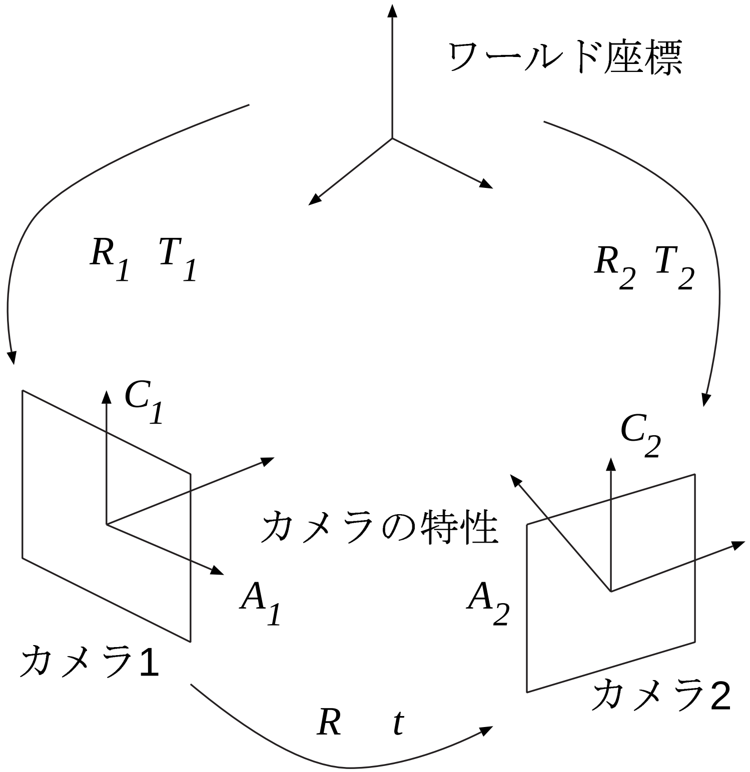
- 下記の A_i 行列に対し疑似逆行列 A^+ を求め，$y_i = A_i x_i$ の最小 2 乗解を求めよ．A, A^T の列空間，零空間を求め最適解が A^T の列空間に属すること，$\boldsymbol{y} - AA^+\boldsymbol{y}$ が A^T の零空間に属することを確認せよ.

$$\boldsymbol{y}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{y}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

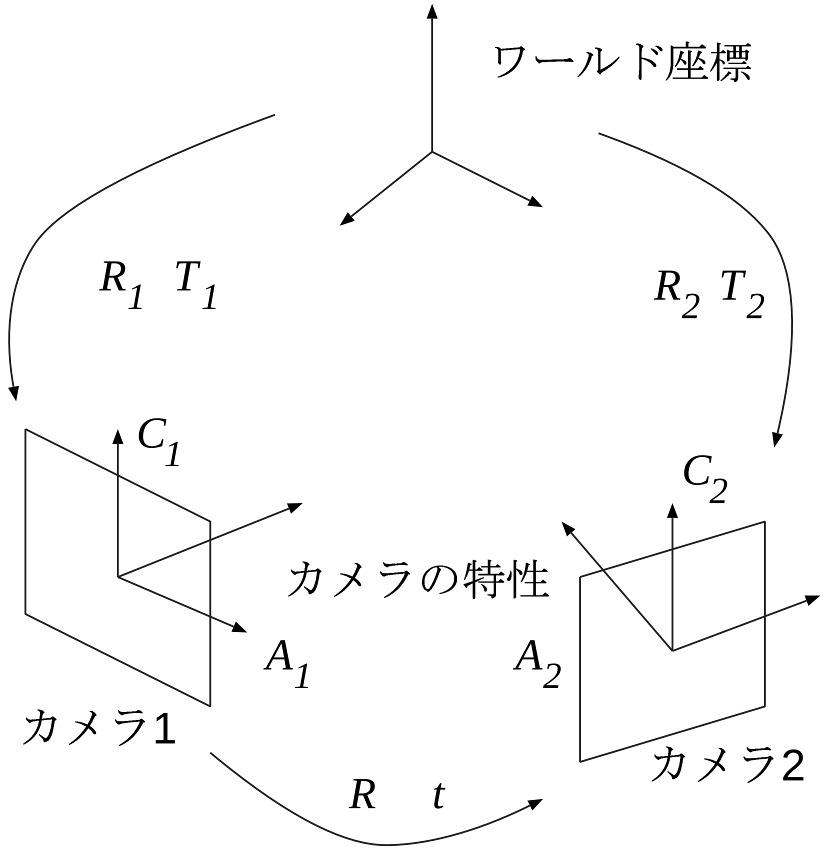
$$\boldsymbol{y}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

ステレオ



- 左右に少し離れた位置に2台のカメラをおくと，それらのカメラの像は少し異る．その違いはカメラの相対的な位置と対象表面までの距離によって決まる．
- **左右のカメラの相対的な位置がわかり**，**左右のカメラで見ている対象の対応がつく**ならば，画像の違いを用いて距離が逆算できる．この原理を**三角法**と呼ぶ．

透視射影



- 注目する点のワールド座標での位置: (X, Y, Z)
- この点の画像座標: $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$
- カメラの透視投影行列: P_1, P_2
- このとき,

$$s_i \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ 1 \end{bmatrix} = P_i \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

が成り立つ.

位置の復元

- カメラ 1, 2 において

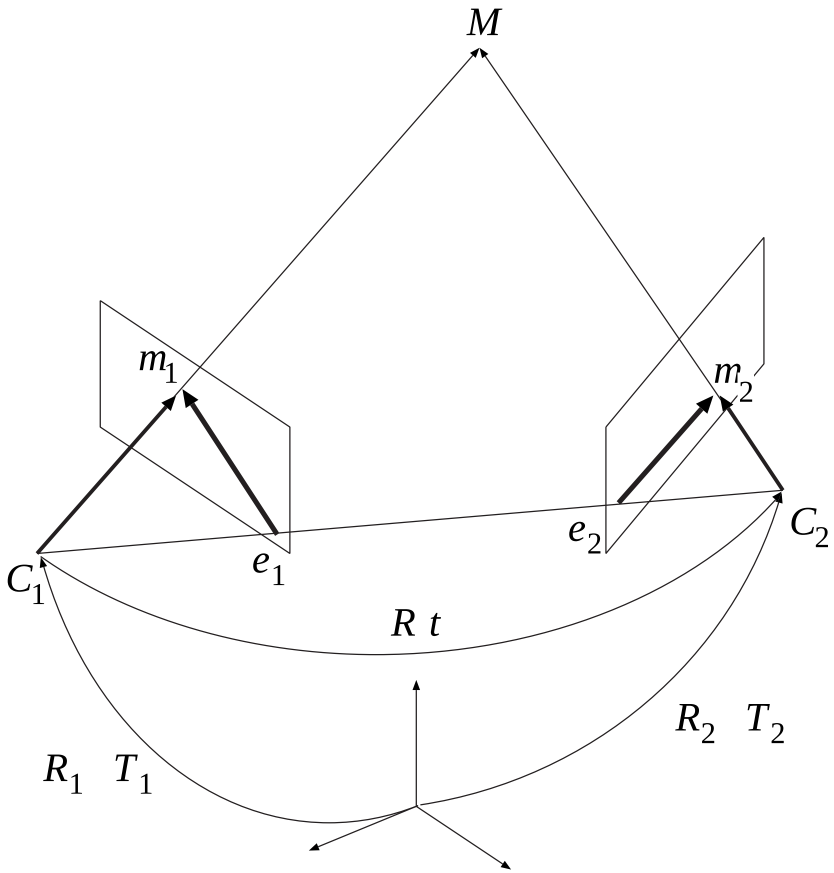
$$s_i \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ 1 \end{bmatrix} = P_i \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} \quad i = 1, 2$$

- したがって，P_1, P_2, s_1, s_2 が既知であれば，対応する画像の位置座標の組 $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ から X, Y, Z を求めることができる．

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = P^+ \boldsymbol{y} \quad \text{ただし} \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} s_1 u_1 \\ s_1 v_1 \\ s_1 \\ s_2 u_2 \\ s_2 v_2 \\ s_2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

- s_i が未知の場合はどうすれば良いか考えてみよ．

2 台のカメラで見える像



- 内部パラメータ行列: A_1, A_2
- ワールド座標に対するカメラの相対的な位置・姿勢: (R_1, T_1), (R_2, T_2)
- カメラ 1 を基準としたカメラ 2 への回転と並進:

$$R = R_1^T R_2, \quad t = R_1^T (T_2 - T_1)$$

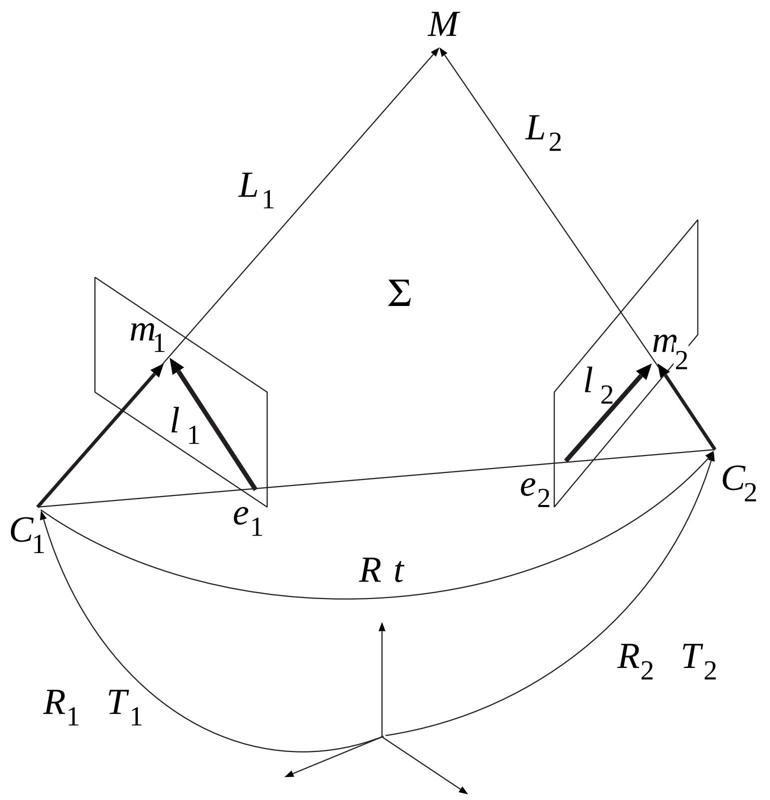
- 注目点の位置: $M = (X, Y, Z, 1)^T$
- カメラの画像面上における注目点の位置:

$$m_1 = (u_1, v_1, 1)^T,\ m_2 = (u_2, v_2, 1)^T$$

つまり

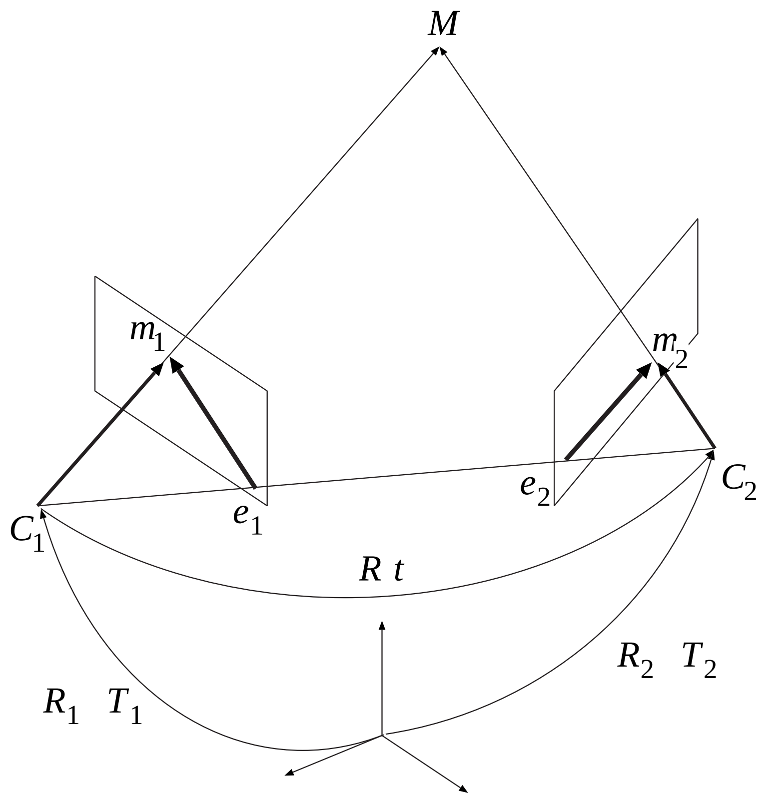
$$\begin{aligned} s_1 m_1 &= A_1 \,[\, R_1^T \;\; | \;\; -R_1^T T_1 \,]\, M \\ s_2 m_2 &= A_2 \,[\, R_2^T \;\; | \;\; -R_2^T T_2 \,]\, M \end{aligned}$$

エピポーラ幾何



- C_1, C_2, M はひとつの平面 Σ を定義する．この平面を**エピポーラ平面**と呼ぶ.
  - 点 m_1, m_2 はエピポーラ平面上にある.
  - エピポーラ面と画像面の交線 l_1, l_2 を**エピポーラ線**という.
  - 視点 C_1, C_2 を結ぶ直線と画像平面の交点 e_1, e_2 を**エピポール**という.
- 空間上の点のひとつの点に対し，ひとつのエピポーラ平面が規定され，それぞれの画像平面との交線 (エピポーラ線) が定まる．エピポーラ線はエピポールを中心とした扇形の構造をなす．つまり，すべてのエピポーラ線はエピポールを通る.
- 空間上の点を複数のカメラに投影した場合には複数の画像間に特有の幾何が現れる．このような幾何のことを**エピポーラ幾何**という.

エピポーラ拘束



- カメラの画像面上における注目点の位置:

$$\begin{aligned} s_1 m_1 &= A_1 \left[\, R_1^T \quad | \quad -R_1^T T_1 \,\right] M \\ s_2 m_2 &= A_2 \left[\, R_2^T \quad | \quad -R_2^T T_2 \,\right] M \end{aligned}$$

- $\tilde{M} = [X, Y, Z],\ M = [\tilde{M}^T \quad 1]^T$ に注意して書き直すと

$$\begin{aligned} s_1 (A_1 R_1^T)^{-1} m_1 &= \tilde{M} - T_1 \\ s_2 (A_2 R_2^T)^{-1} m_2 &= \tilde{M} - T_2 \end{aligned}$$

- 両式から M を消去すると

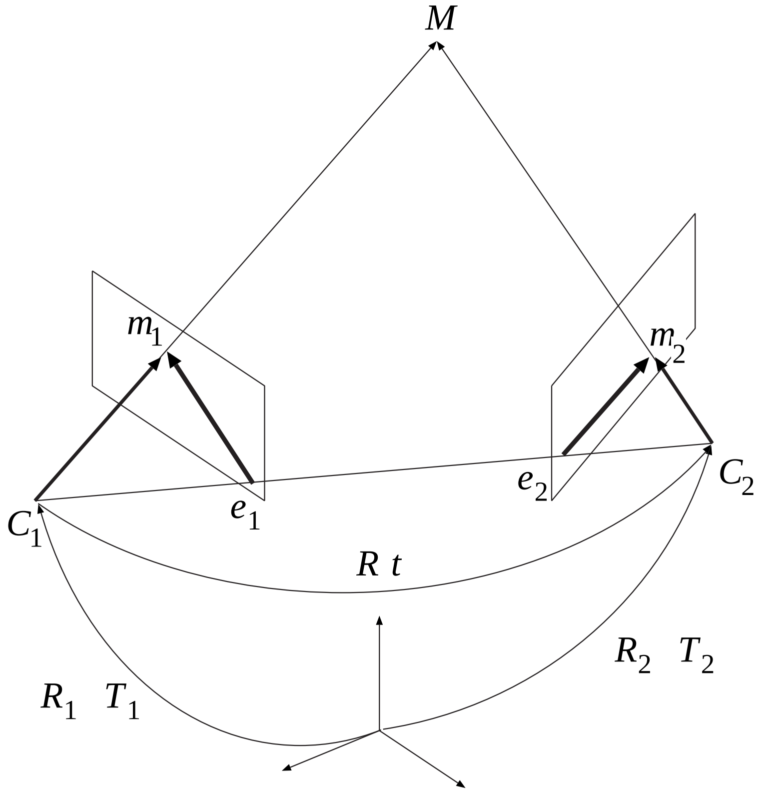
$$s_1 R_1 A_1^{-1} m_1 - s_2 R_2 A_2^{-1} m_2 = T_2 - T_1$$

- $R = R_1^T R_2, \quad t = R_1^T (T_2 - T_1)$ であるから

$$s_1 A_1^{-1} m_1 - s_2 R A_2^{-1} m_2 = t$$

- 3本のベクトル $A_1^{-1} m_1,\ R A_2^{-1} m_2,\ t$ が同一平面上に存在する (**エピポーラ拘束**)

基礎方程式と基礎行列



- 画像 (m_1, m_2)，カメラ内部パラメータ (A_1, A_2) とカメラ間の幾何学 (R, t) の関係 (エピポーラ拘束)

$$s_1 A_1^{-1} m_1 - s_2 R A_2^{-1} m_2 = t$$

- $A_1^{-1} m_1$ と $t \wedge (R A_2^{-1} m_2)$ は直交 ($\wedge$ はベクトルの外積)
- ベクトル $t = (t_x, t_y, t_z)$ に対して $t \wedge x = Tx$ となる歪対象行列

$$T = \begin{bmatrix} 0 & t_z & -t_y \\ -t_z & 0 & t_x \\ t_y & -t_x & 0 \end{bmatrix}$$

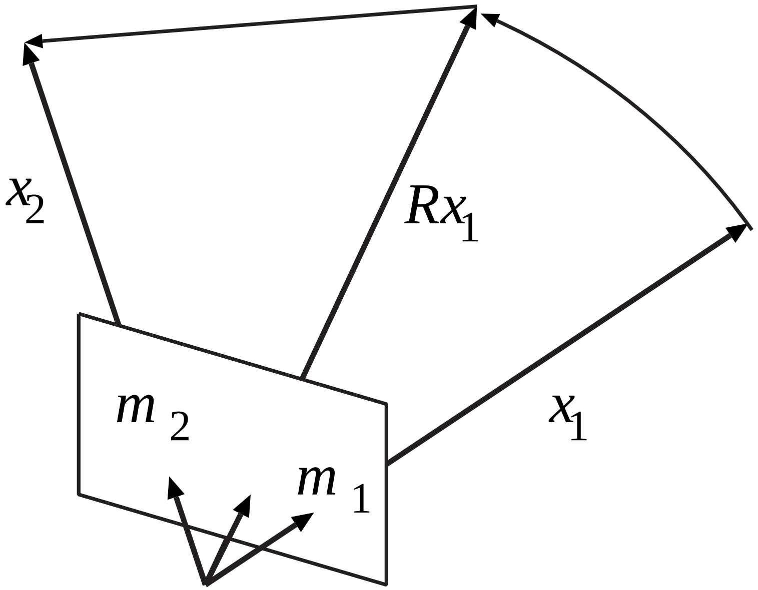
- **基礎方程式** (fundamental equation):

$$m_1^T (A_1^{-1})^T T R A_2^{-1} m_2 = 0$$

- F を**基礎行列** (fundamental matrix) という

$$m_1^T F m_2 = 0, \qquad F = (A_1^{-1})^T T R A_2^{-1}$$

基本方程式



ひとつのカメラが移動しながら画像を撮る場合や，カメラは固定して対象が移動する場合は，まったく同じ内部パラメータのカメラ2台によるステレオとみなすことができ，そのときは基本行列(essential matrix)

$$E = TR$$

が本質的な役割を果たす．

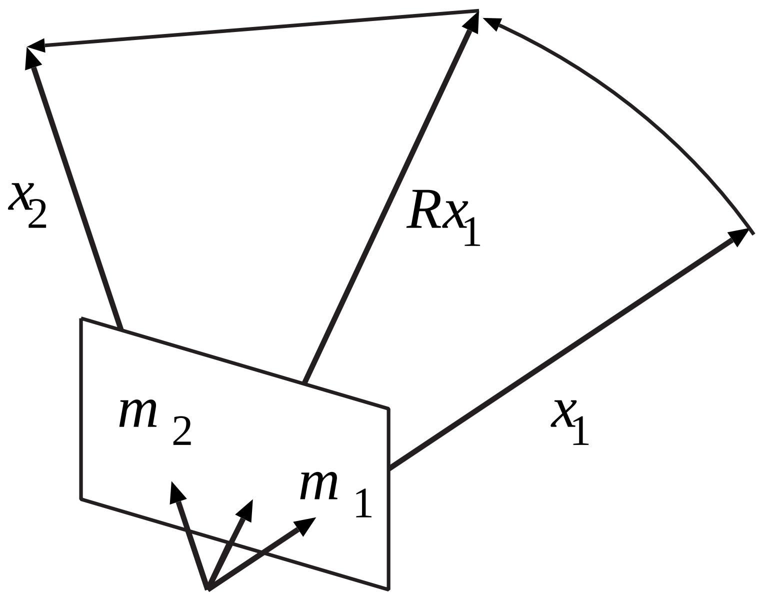
- エピポーラ拘束 (Rm_1, m_2, t は同一平面)

$$m_2^T(t \wedge Rm_1) = 0$$

- 基本方程式

$$m_2 E m_1 = 0$$

基本行列



- カメラ座標系における対応点の3次元位置

$$x_{2i} = Rx_{1i} + t \quad \text{for} \quad i = 1, \dots N$$

$$x_{ki} = \begin{bmatrix} {}^kX_i \\ {}^kY_i \\ {}^kZ_i \end{bmatrix} \quad \text{for} \quad k = 1, 2, \quad i = 1, \dots N$$

- 画像平面における点

$$m_{kj} = \begin{bmatrix} u_{kj} \\ v_{kj} \\ w_{kj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} fX_{kj}/Z_{kj} \\ fY_{kj}/Z_{kj} \\ f \end{bmatrix}$$

- エピポーラ拘束

$$m_{2i}^T E m_{1i} = 0 \quad \text{for} \quad i = 1, \dots N$$

- 基本行列

$$E = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix}$$

基本行列の性質

- 基本行列の集合

$$E = TR, \quad T = t\wedge$$

- 任意の3×3行列Qが基本行列であるための必用十分条件

$$Q = U\Sigma V^T, \quad Q \in E \Longleftrightarrow \Sigma = \mathrm{diag}\{\lambda, \lambda, 0\}$$

  – $(\Longrightarrow) : t = \|t\| z$ とおく

$$QQ^T = TRR^TT^T = TT^T = -T^2$$

$$T^2[x\ y\ z] = t \wedge t \wedge [x\ y\ z] = \|t\|^2[-x \ \ -y \ \ \mathbf{0}] = [x\ y\ z]\mathrm{diag}\{-\|t\|^2, -\|t\|^2, 0\}$$

$$QQ^T = -T^2 = [x\ y\ z]\mathrm{diag}\{\|t\|^2, \|t\|^2, 0\}[x\ y\ z]^T$$

$$Q = [x\ y\ z]\mathrm{diag}\{\|t\|, \|t\|, 0\}V^T$$

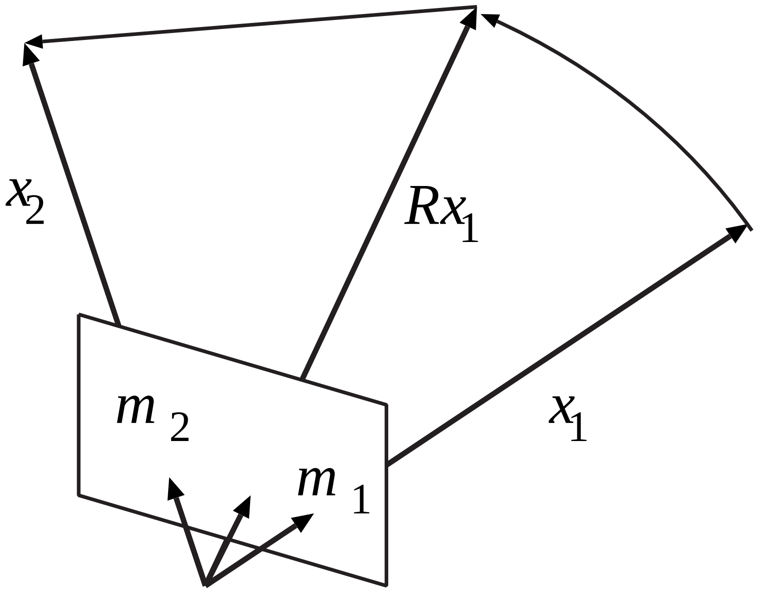
  – $(\Longleftarrow) : Q = U\Sigma_0 V^T$ とおく． $R_z = \mathrm{Rot}(z, \pi/2)$

$$Q = U\Sigma_0 R_z^T U^T U R_z V^T = T_0 R_0, \quad T_0 = U\Sigma_0 R_z^T U^T, R_0 = U R_z V^T$$

$$R_0^T R_0 = V R_z^T U^T U R_z V^T = I$$

$$T_0^T = U R_z \Sigma_0 U^T = U\Sigma_0 R_z U^T = -T_0 \quad (R_z^T = -R_z)$$

基本行列の推定 (8点アルゴリズム)



- エピポーラ拘束

$$m_{2i}^T E m_{1i} = 0 \quad \text{for} \quad i = 1, \ldots N$$

$$E = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix}$$

- 1点に対しひとつのエピポーラ条件が成立する．一方，基本行列 (3×3 行列) はスカラの自由度を持つ．したがって8点が観測できれば基本行列を推定できる．

$$Be = 0, \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix}, \qquad e = \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ \vdots \\ e_{33} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} b_i \ = \ [& u_{2j}u_{1j} \quad u_{2j}v_{1j} \quad u_{2j}s_{1j} \\ & v_{2j}u_{1j} \quad v_{2j}v_{1j} \quad v_{2j}s_{1j} \\ & s_{2j}u_{1j} \quad s_{2j}v_{1j} \quad s_{2j}s_{1j} \,] \end{aligned}$$

基本行列の推定 (8 点アルゴリズム)

- 基本行列 (3×3 行列) はスカラの自由度を持つから $\|e\| = 1$ とする．
- $N \geq 8$ に対しエピポーラ拘束が成り立つ

$$Be = 0, \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix}, \qquad e = \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ \vdots \\ e_{33} \end{bmatrix},$$

$$b_i = \begin{bmatrix} u_{2j}u_{1j} & u_{2j}v_{1j} & u_{2j}s_{1j} & v_{2j}u_{1j} & v_{2j}v_{1j} & v_{2j}s_{1j} & s_{2j}u_{1j} & s_{2j}v_{1j} & s_{2j}s_{1j} \end{bmatrix}$$

- したがって，基本行列の推定は下記の線形問題となる

$$\text{Find} \quad e \in R^9 \quad \text{s.t.} \quad Be \to \min \quad \text{with} \quad \|e\| = 1$$

- この問題の解は B の最小特異値に対応する特異ベクトルとして求まる
- e から E を構成し，E の特異値が $\lambda, \lambda, 0$ となるように修正

運動パラメタの復元

- $E = U\Sigma V^T$ と特異値分解
- $t = \sigma_1 u_3$ (u_3 は U の第3列)
- $R = UR_zV^T$

8点アルゴリズムI

1. $\{(m_{1i}, m_{2i}), i = 1, \ldots, N\}$ より B を構成する.

```
B=zeros(N,9);
for i=1:N
  u1=m1(1,i);    v1=m1(2,i);    w1=m1(3,i);
  u2=m2(1,i);    v2=m2(2,i);    w2=m2(3,i);
  B(i,:)=[u2*u1, u2*v1, u2*w1,
          v2*u1, v2*v1, v2*w1,
          w2*u1, w2*v1, w2*w1];
end
```

2. $|Be| \to \min$ となる e (ただし $|e| = 1$) を求める.

```
[U D V]=svd(B);  e=V(:,9);
```

3. e から E をつくる. ただし $\mathrm{trace} E^T E = 2$ である.

```
E=sqrt(2)*[q(1:3)'; q(4:6)'; q(7:9)'];
# residual=trace(m2'*E*m1);
```

8点アルゴリズムII

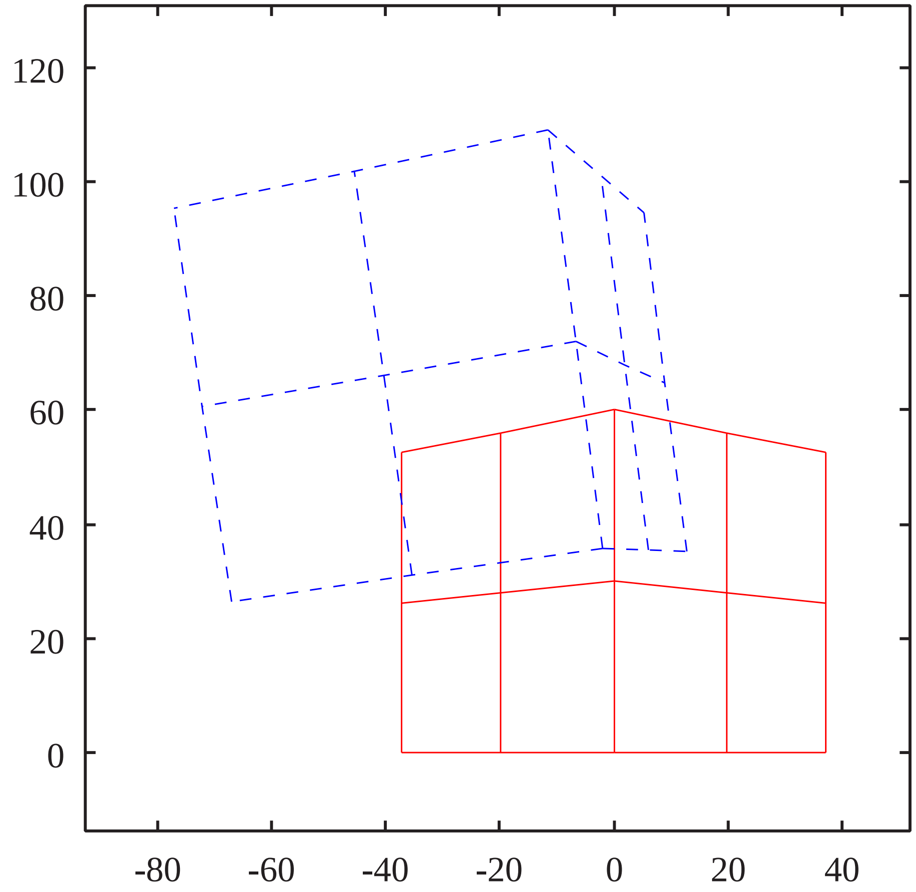
4. 歪対称行列Tと回転行列Rを用いて$\hat{E} = TR$をみたす$\hat{E}$のうち$|\hat{E} - E|$を最小とする$\hat{E}$を求める.

```
[U D V]=svd(E);
D=diag((D(1)+D(2))/2, (D(1)+D(2))/2, 0);
hatE=U*D*V';
```

5. $\hat{E}$をRとTに分解する.

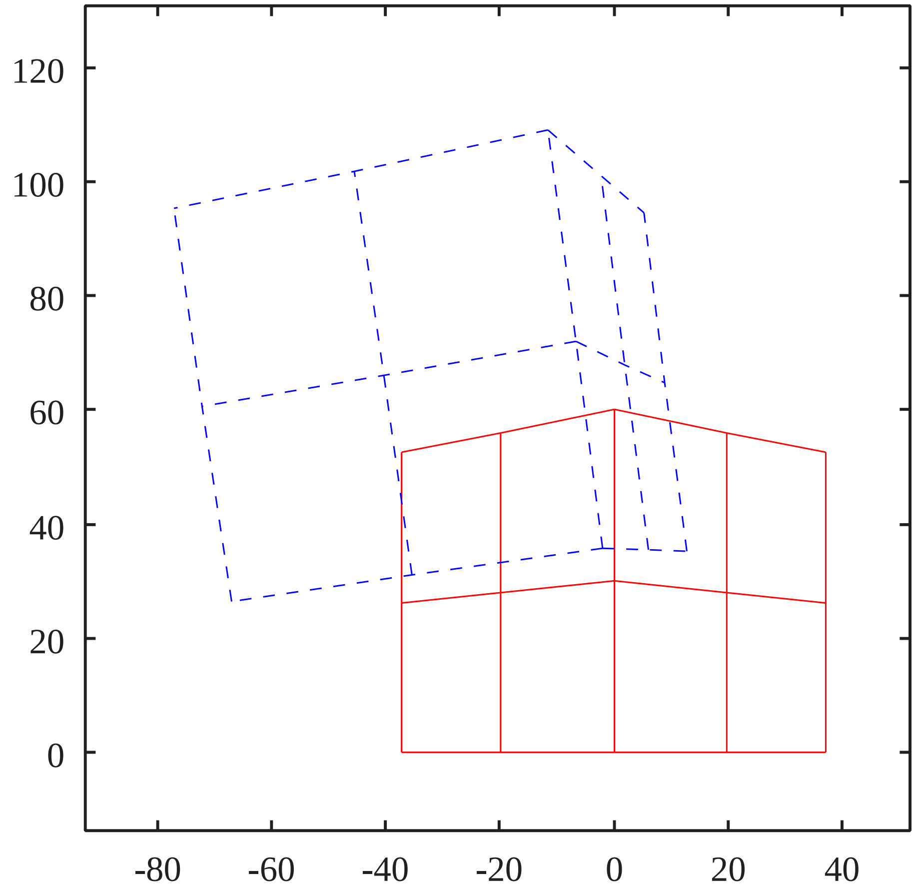
```
[U, D, V]=svd(hatE);
t=U(:,3);

Rz=[0 1 0; -1 0 0;0 0 1];
R1=U*Rz*V';
R2=U*Rz'*V';
```

8点アルゴリズムシミュレーション



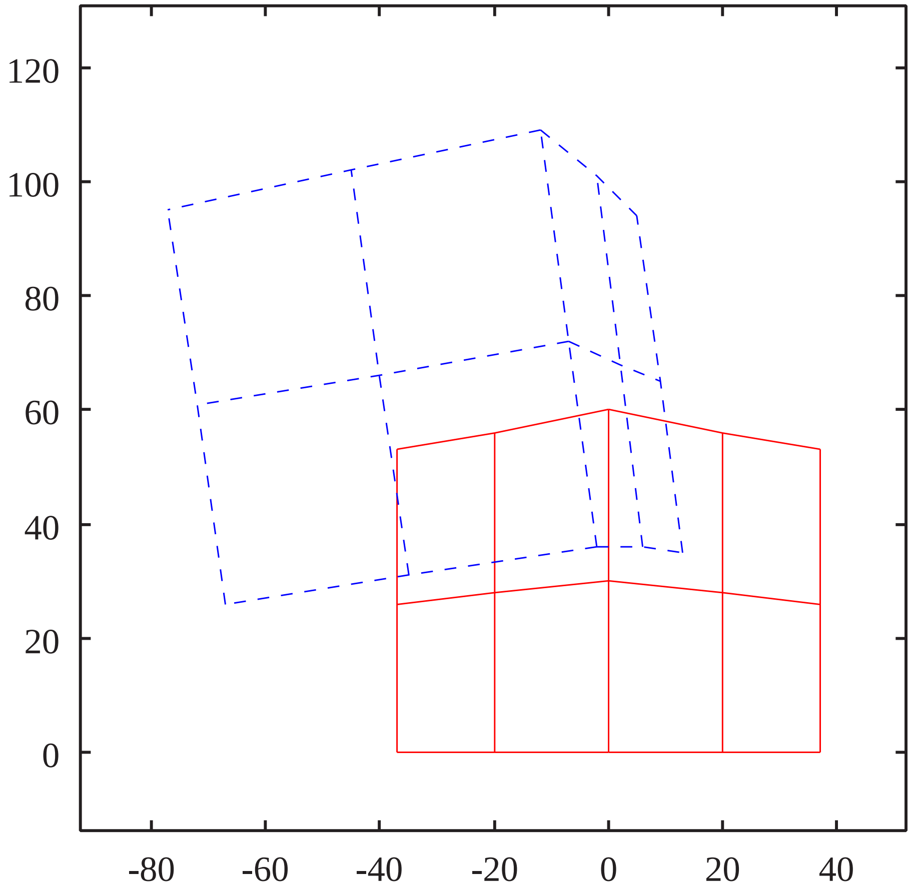
- 15点観測
- $f = -3;\ noizelevel = 0.3;$
- $rpy = [10\ 30\ 5];\ t = [50\ 10\ 3];$
- $D = 1000;\ objsize = 100$
- 画面離散化
- ノイズ
- 正規化

離散化なしノイズなし正規化なし



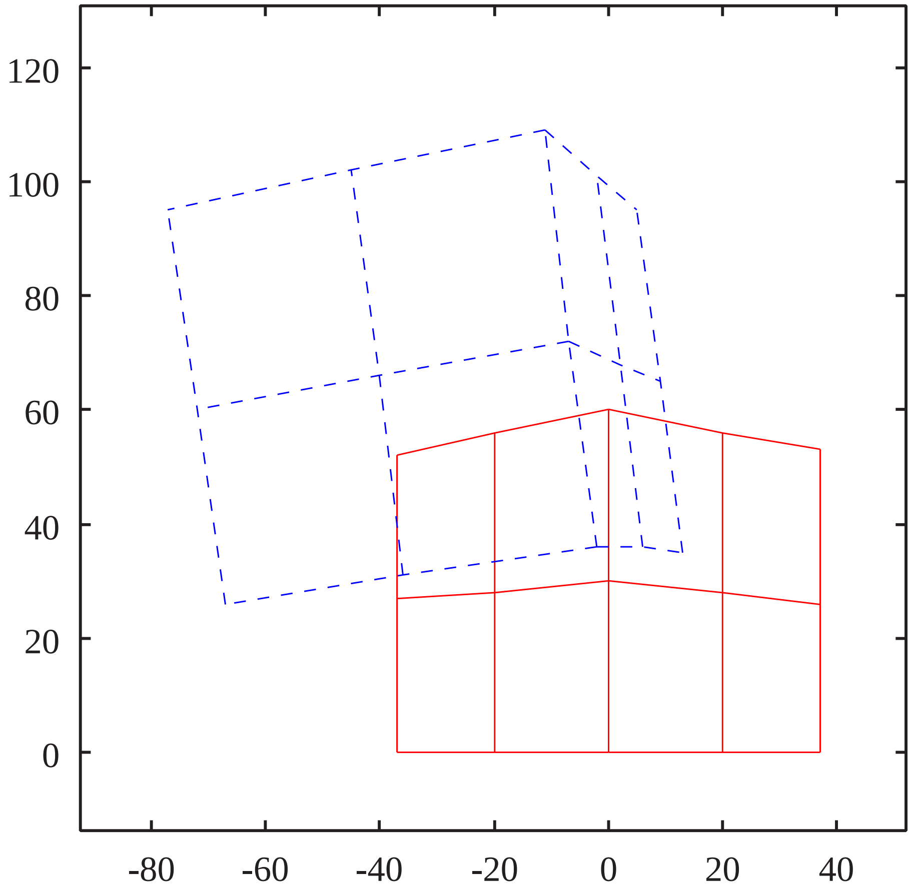

```
Essential Matrix:
  -0.11  -0.04   0.17
   0.54  -0.08  -0.81
  -0.02   0.99  -0.10
R:
   0.85  -0.13   0.51
   0.15   0.99   0.00
  -0.50   0.08   0.86
Re:
   0.85  -0.13   0.51
   0.15   0.99   0.00
  -0.50   0.08   0.86
rpy:
   0.17   0.52   0.09
rpye:
   0.17   0.52   0.09
t:
    500    100     30
normlized t:
   0.98   0.20   0.06
te:
   0.98   0.20   0.06
```

離散化ありノイズなし正規化なし



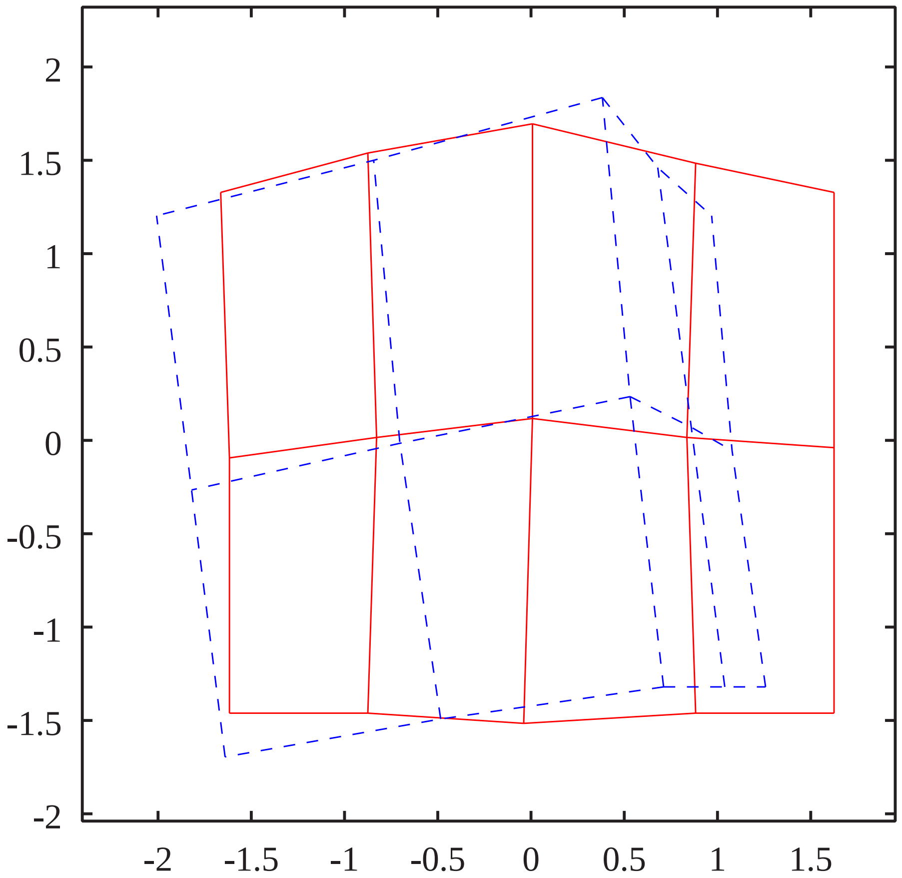

```
Essential Matrix:
  -0.17  -0.27   0.15
   0.71  -0.00  -0.72
   0.01   0.92  -0.09
R:
   0.85  -0.13   0.51
   0.15   0.99   0.00
  -0.50   0.08   0.86
Re:
   0.86  -0.16   0.48
   0.15   0.99   0.06
  -0.48   0.02   0.88
rpy:
   0.17   0.52   0.09
rpye:
   0.17   0.50   0.03
t:
    500    100     30
normlized t:
   0.98   0.20   0.06
te:
   0.94   0.19   0.28
```

離散化ありノイズあり正規化なし



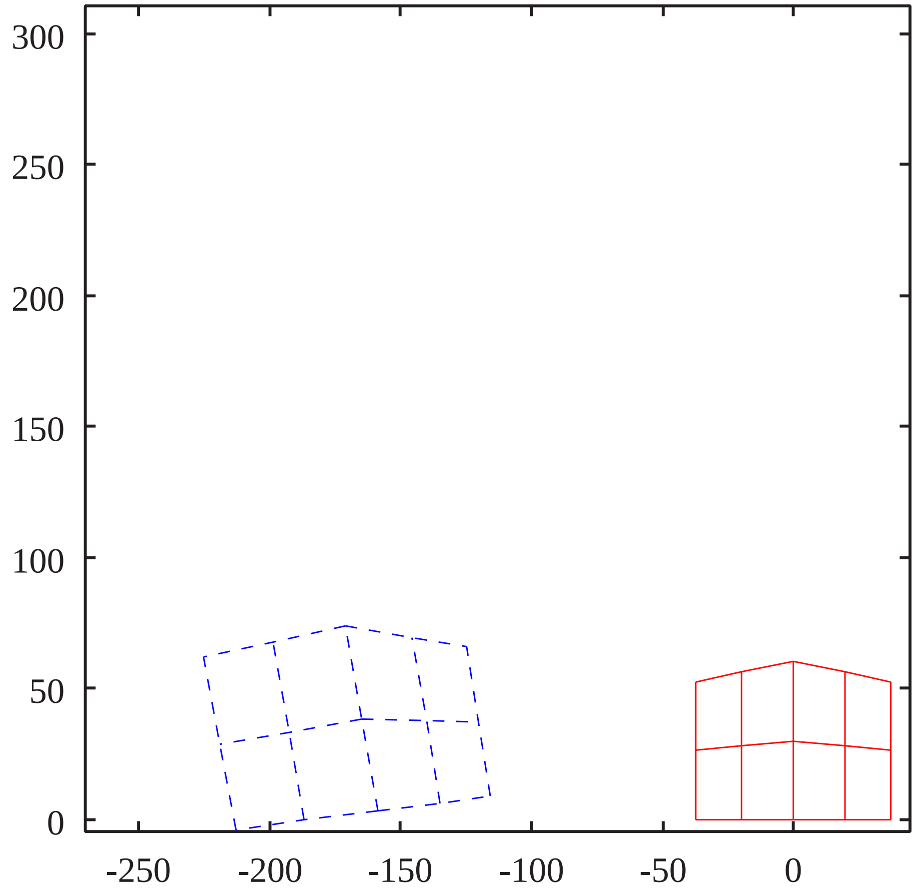

```
Essential Matrix:
  -0.01   0.15   0.18
   0.44  -0.12  -0.85
  -0.04   1.01  -0.10
R:
   0.85  -0.13   0.51
   0.15   0.99   0.00
  -0.50   0.08   0.86
Re:
   0.83  -0.10   0.56
   0.14   0.99  -0.03
  -0.55   0.10   0.83
rpy:
   0.17   0.52   0.09
rpye:
   0.17   0.58   0.12
t:
    500    100     30
normlized t:
   0.98   0.20   0.06
te:
   0.98   0.18  -0.12
```

離散化ありノイズあり正規化あり



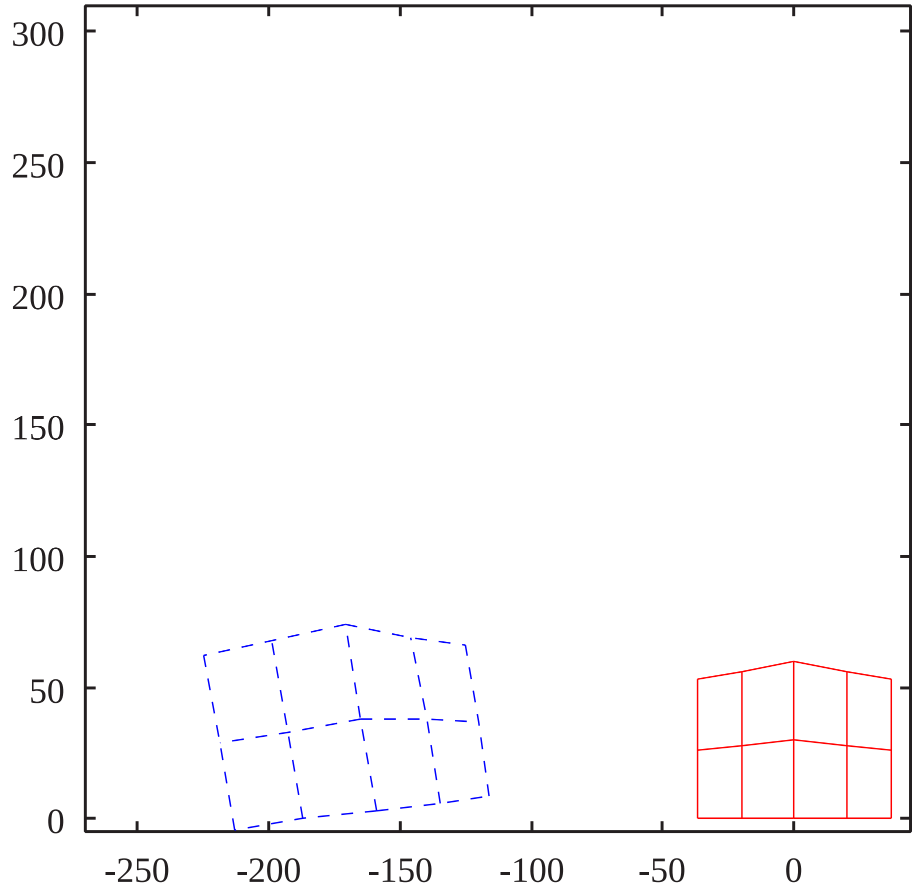

```
Essential Matrix:
   0.22   0.16  -0.20
  -0.53   0.05   0.79
   0.05  -0.98   0.10
R:
   0.85  -0.13   0.51
   0.15   0.99   0.00
  -0.50   0.08   0.86
Re:
   0.87  -0.21   0.44
   0.20   0.98   0.06
  -0.44   0.04   0.90
rpy:
   0.17   0.52   0.09
rpye:
   0.23   0.46   0.04
t:
    500    100     30
normlized t:
   0.98   0.20   0.06
te:
   0.95   0.28   0.16
```

離散化なしノイズなし正規化なし



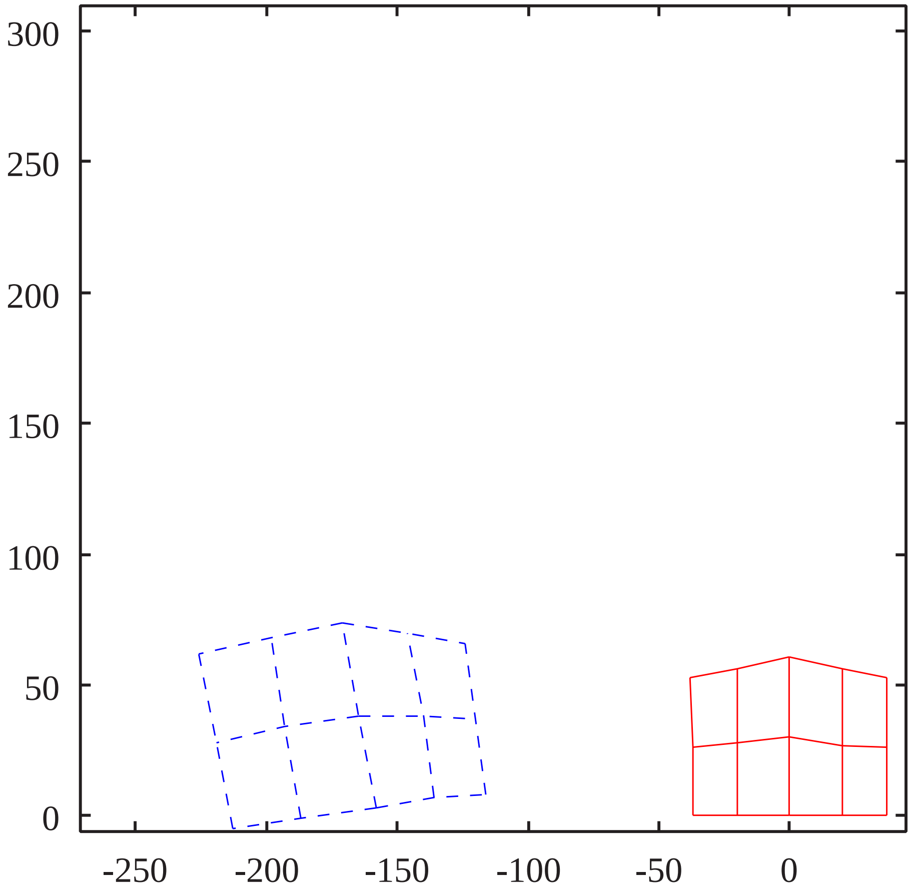

```
Essential Matrix:
  -0.11  -0.04   0.17
   0.54  -0.08  -0.81
  -0.02   0.99  -0.10
R:
   0.85  -0.13   0.51
   0.15   0.99   0.00
  -0.50   0.08   0.86
Re:
   0.85  -0.13   0.51
   0.15   0.99   0.00
  -0.50   0.08   0.86
rpy:
   0.17   0.52   0.09
rpye:
   0.17   0.52   0.09
t:
     50     10      3
normlized t:
   0.98   0.20   0.06
te:
   0.98   0.20   0.06
```

離散化ありノイズなし正規化なし



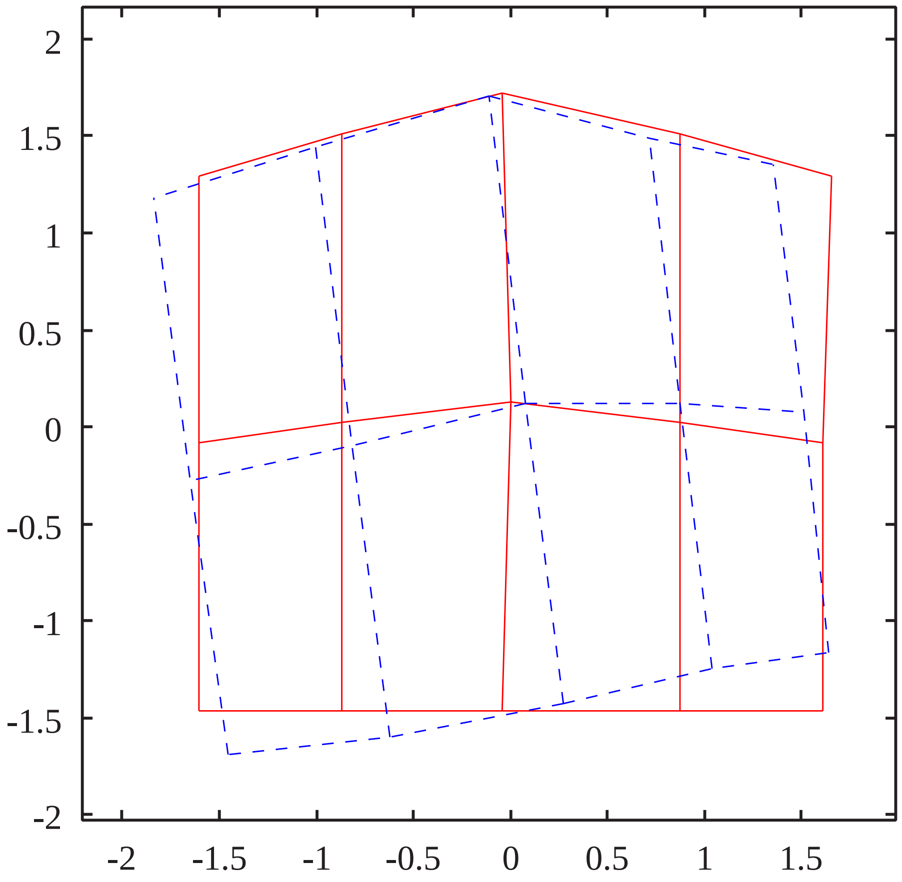

```
Essential Matrix:
   0.07   0.80   0.06
  -0.98   0.14   0.13
  -0.15  -0.56  -0.03
R:
   0.85  -0.13   0.51
   0.15   0.99   0.00
  -0.50   0.08   0.86
Re:
   0.87  -0.12   0.48
   0.14   0.99  -0.01
  -0.47   0.08   0.88
rpy:
   0.17   0.52   0.09
rpye:
   0.17   0.50   0.03
t:
     50     10      3
normlized t:
   0.98   0.20   0.06
te:
   0.58  -0.08   0.81
```

離散化ありノイズあり正規化なし




```
Essential Matrix:
   0.12   0.91   0.06
  -0.98   0.15  -0.06
  -0.13  -0.40  -0.03
R:
   0.85  -0.13   0.51
   0.15   0.99   0.00
  -0.50   0.08   0.86
Re:
   0.93  -0.09  -0.36
   0.15   0.98   0.14
  -0.34   0.18  -0.92
rpy:
   0.17   0.52   0.09
rpye:
   0.16   0.34  -0.19
t:
     50     10      3
normlized t:
   0.98   0.20   0.06
te:
  -0.41   0.07  -0.91
```

離散化ありノイズあり正規化あり




```
Essential Matrix:
   0.13   0.30  -0.06
  -0.74   0.14   0.66
  -0.11  -0.93   0.04
R:
   0.85  -0.13   0.51
   0.15   0.99   0.00
  -0.50   0.08   0.86
Re:
   0.85  -0.19   0.50
   0.21   0.98   0.02
  -0.49   0.09   0.87
rpy:
   0.17   0.52   0.09
rpye:
   0.24   0.51   0.10
t:
     50     10      3
normlized t:
   0.98   0.20   0.06
te:
   0.94   0.09   0.32
```