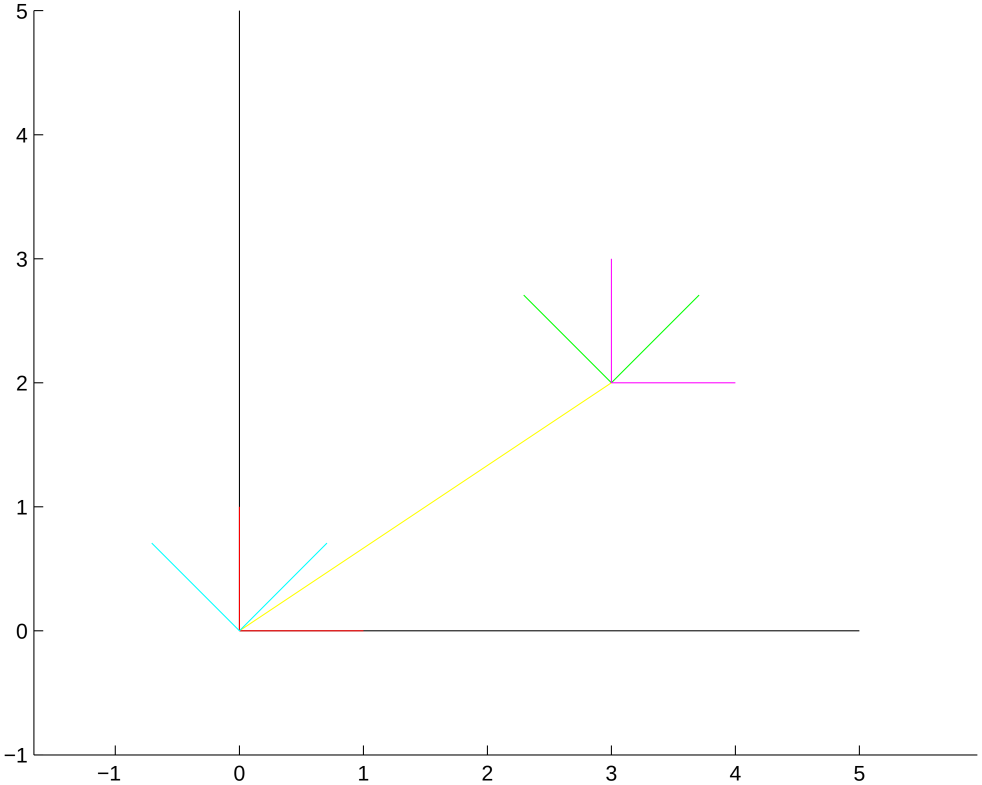
線形代数の応用

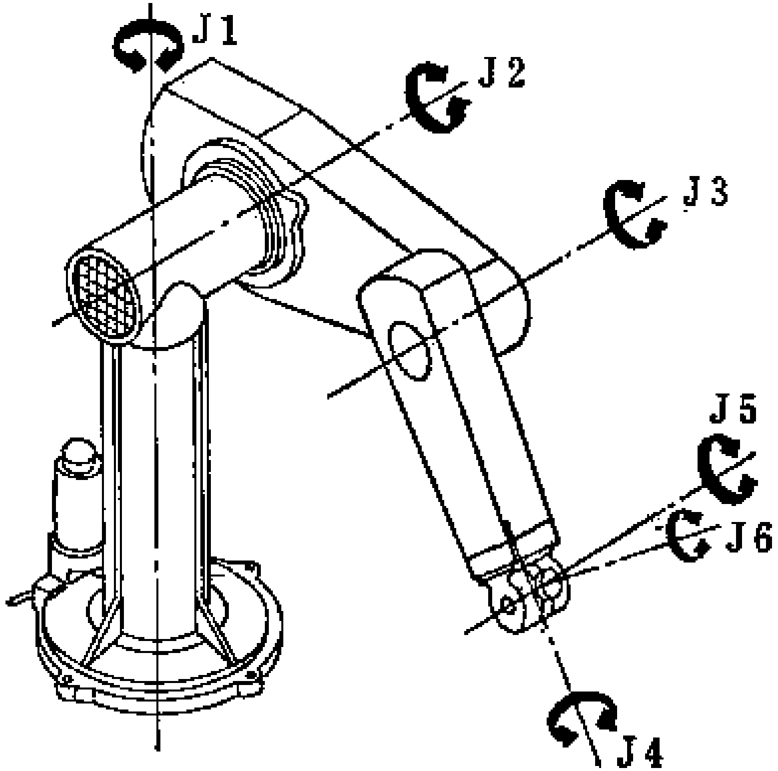
- ロボットのキネマティクス
- ステレオ
- キャリブレーション

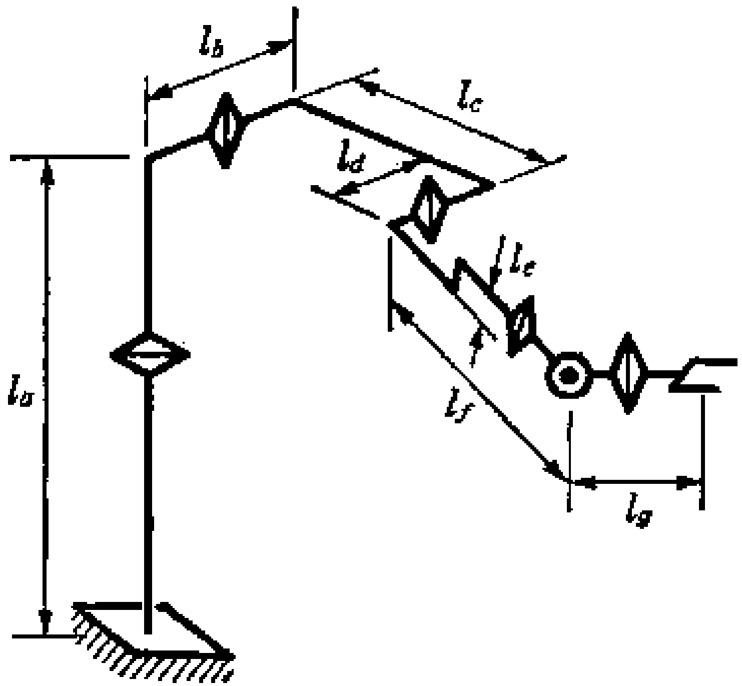
座標系の回転・並進としての解釈



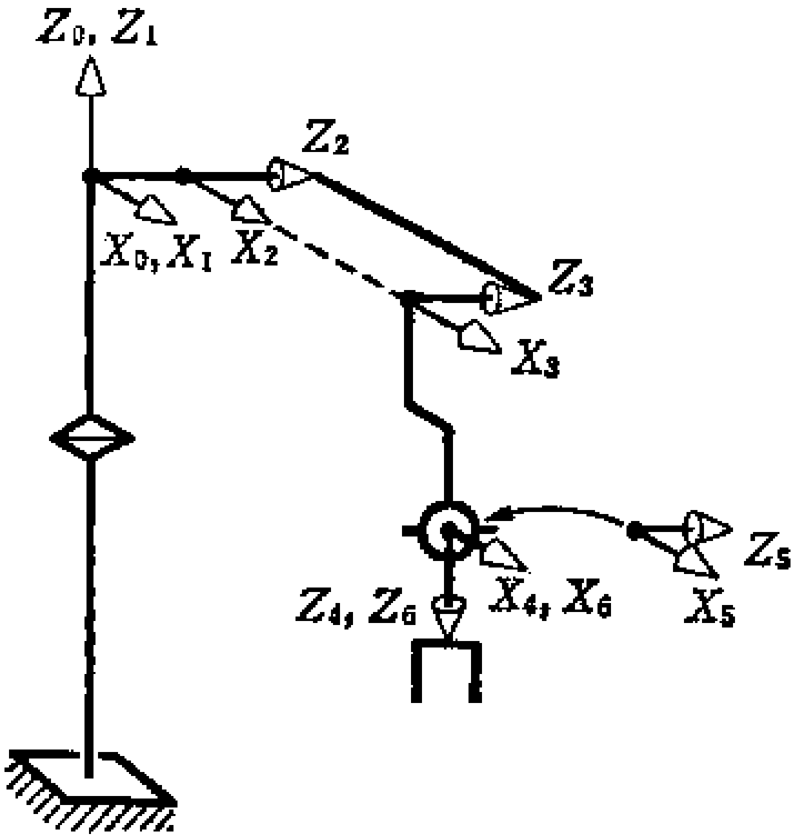
- Σ_A を Σ_A に関して ${}^{A}\boldsymbol{R}_B$ 回転し，それを Σ_A に関して ${}^{A}\boldsymbol{p}_B$ 並進すると Σ_B を得る．
- Σ_A を Σ_A に関して ${}^{A}\boldsymbol{p}_B$ 並進し，その場で ${}^{A}\boldsymbol{R}_B$ 回転すると Σ_B を得る．

PUMA ロボットのリンク構造





PUMA ロボットの同次変換行列 $(0 \rightarrow 1)$

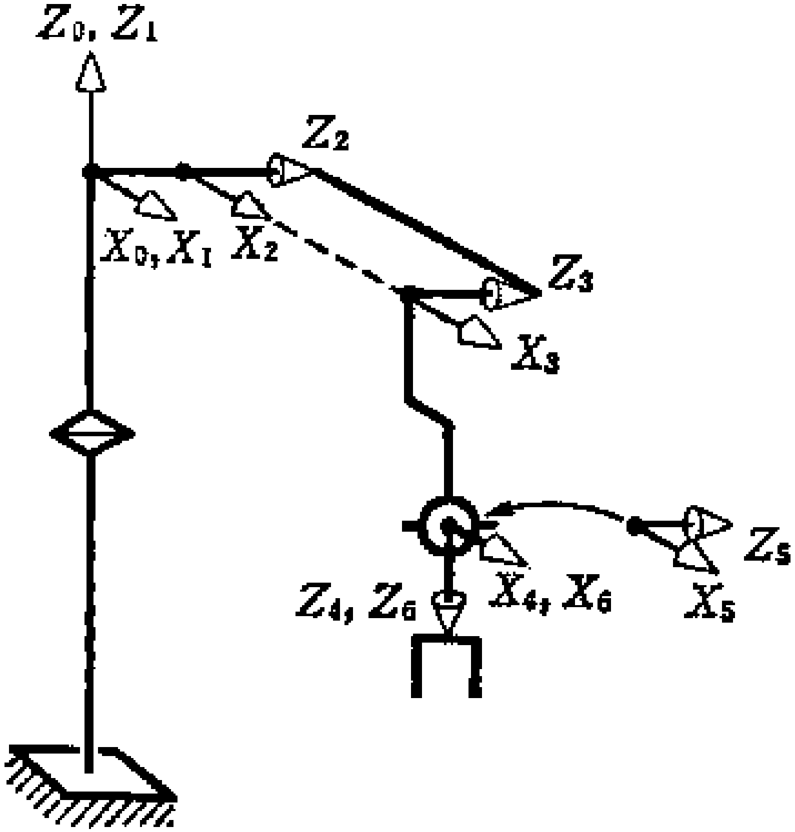


- Σ_0 に対し Σ_1 は並進なしで Σ_0 の z 軸まわりの回転.

$$
{}^0\boldsymbol{T}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

ただし $C_1 = \cos(\theta_1), S_1 = \sin(\theta_1)$ である.

PUMA ロボットの同次変換行列 $(1 \to 2)$



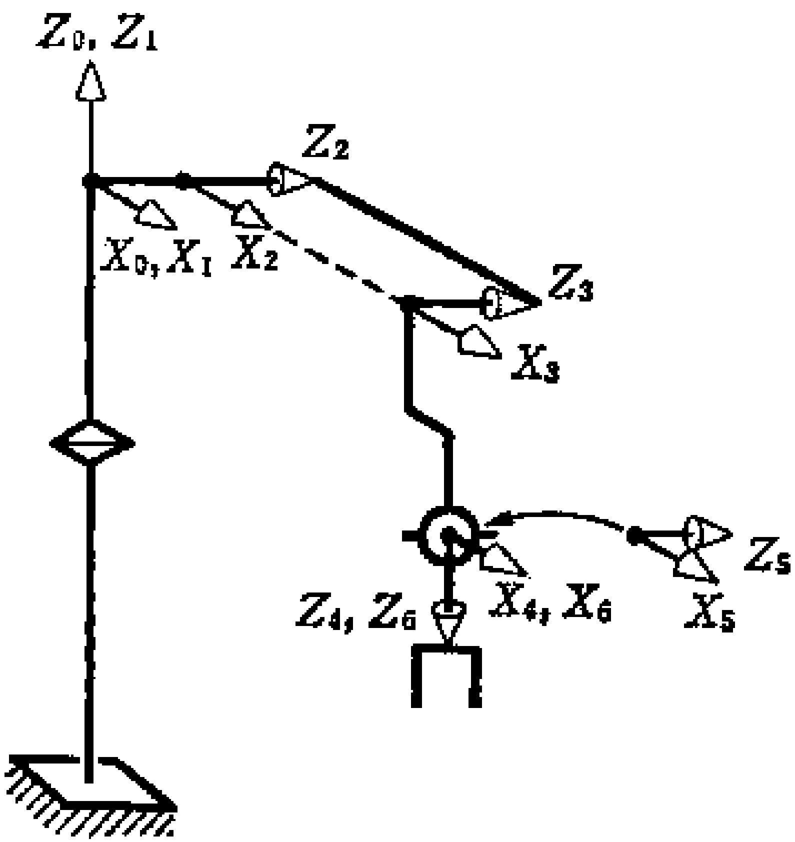
- Σ_1 に対し Σ_2 は...
  - Σ_1 を x 軸まわりに $-\pi/2$ 回転.
  - 回転後の z 方向に $l_b - l_d$ 並進し，その場で z 軸まわりに θ_2 回転.

$$
{}^1\boldsymbol{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_b - l_d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & 0 \\ S_2 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_b - l_d \\ -S_2 & -C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

- 次のように考えても同じ
  - Σ_1 を y 方向に $l_b - l_d$ 並進し，その場で x 軸まわりに $-\pi/2$ 回転.
  - 回転後の z 方向に θ_2 回転.

PUMA ロボットの同次変換行列 $(2 \to 3)$

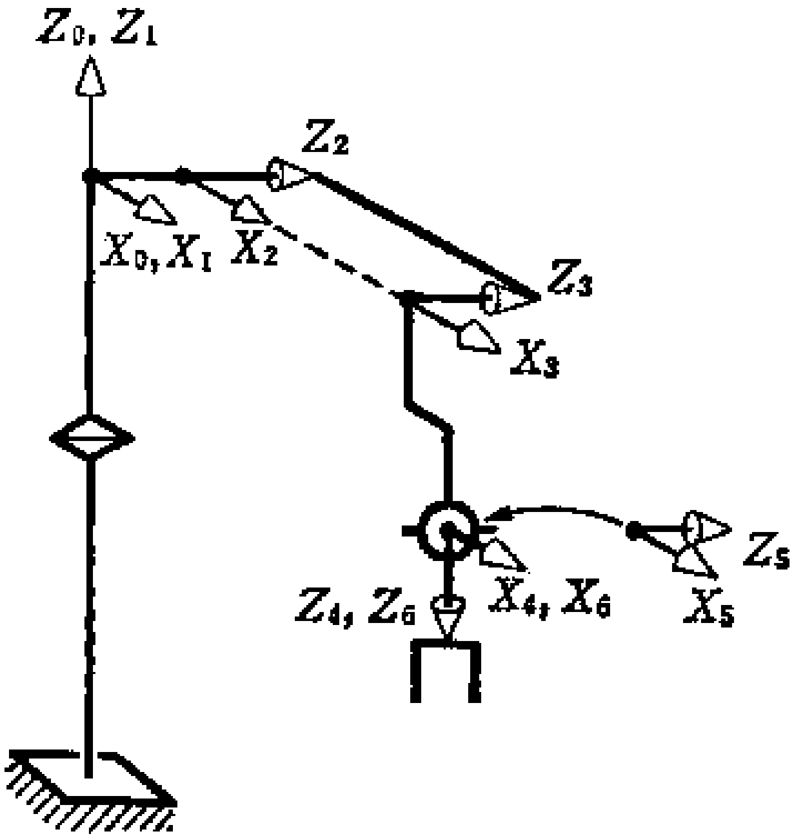


- Σ_2 に対し Σ_3 は...
  - Σ_2 を x 方向に l_c 並進.
  - その場で z 軸まわりに θ_3 回転.

$$
{}^2\boldsymbol{T}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & 0 \\ S_3 & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & l_c \\ S_3 & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

PUMA ロボットの同次変換行列 $(3 \to 4)$

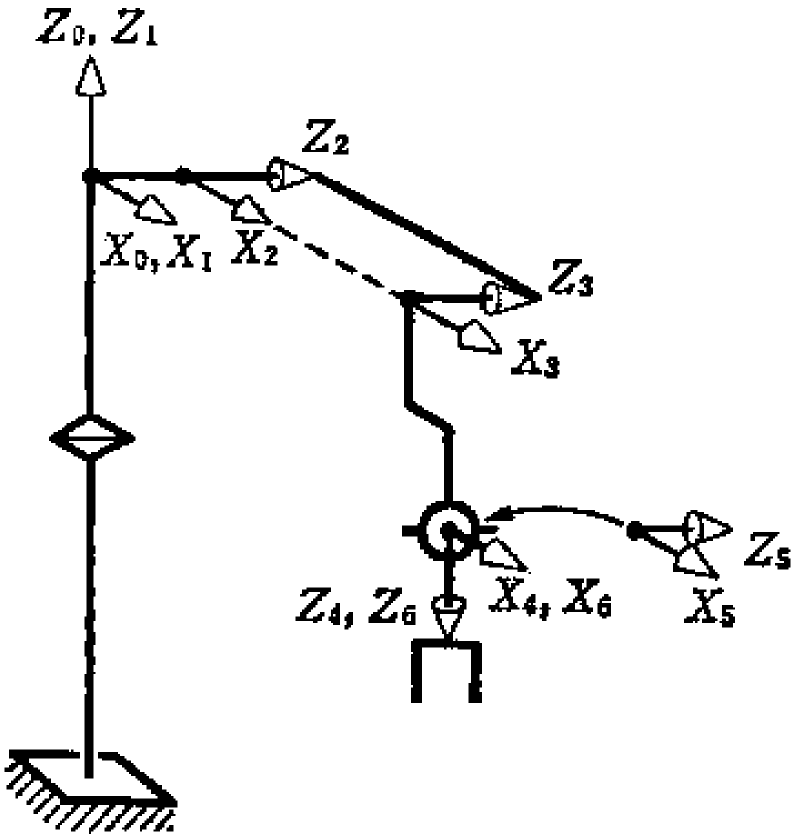


- Σ_3 に対し Σ_4 は...
  - Σ_3 を x 方向に l_e 並進し，その場で x 軸まわりに $-\pi/2$ 回転.
  - z 軸方向に l_f 並進し，その場で z 軸まわりに θ_4 回転.

$$
{}^3\boldsymbol{T}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_e \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_4 & -S_4 & 0 & 0 \\ S_4 & C_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} C_4 & -S_4 & 0 & l_e \\ 0 & 0 & 1 & l_f \\ -S_4 & -C_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

PUMA ロボットの同次変換行列

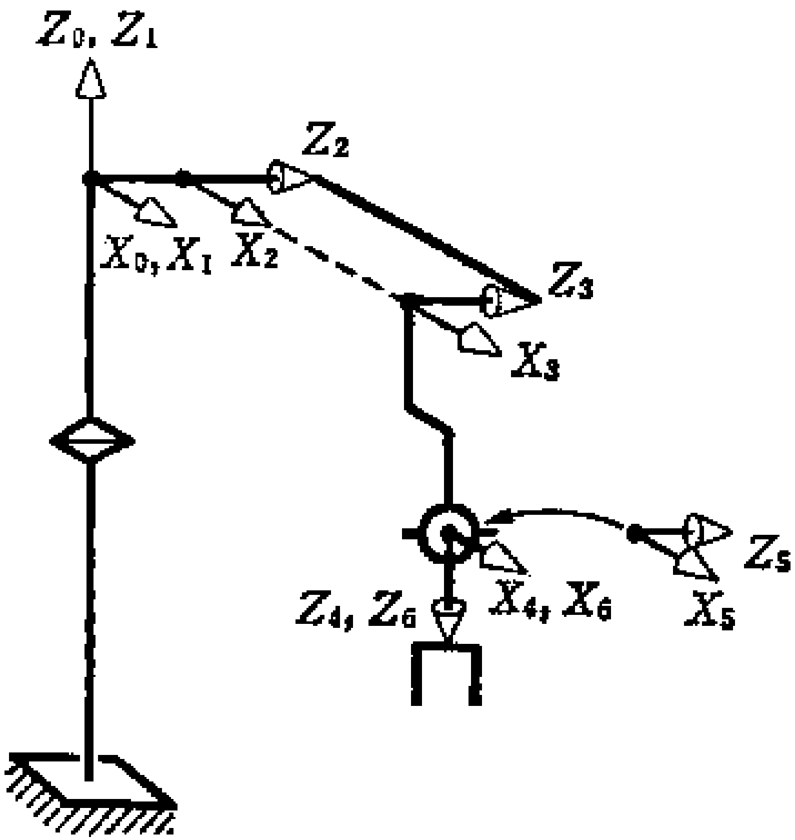


- 同様にして

$$
{}^4\boldsymbol{T}_5 = \begin{bmatrix} C_5 & -S_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S_5 & C_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^5\boldsymbol{T}_6 = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -S_6 & -C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

ロボットキネマティクス(機構学)



- 関節角度θから手先(または手先に固定されたツール) の位置 ${}^0\boldsymbol{r}$ と姿勢 ${}^0\boldsymbol{R}_6$ を求めること
- 一般的には

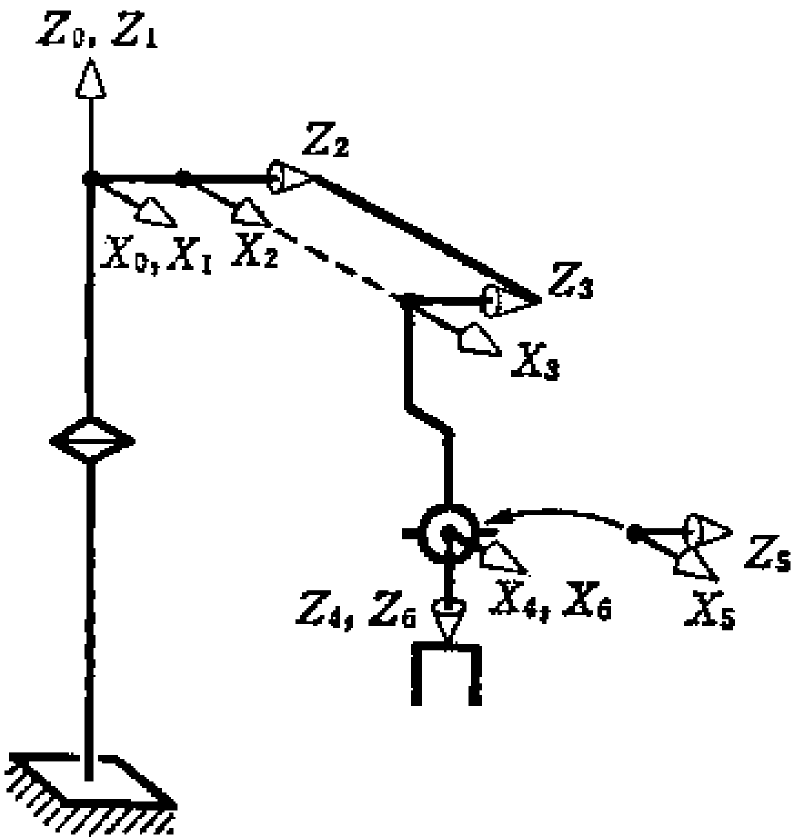
$$
{}^A\boldsymbol{r} = {}^A\boldsymbol{R}_B{}^B\boldsymbol{r} + {}^A\boldsymbol{p}_B
$$

を$A = 5$, $B = 6$から順に基準座標系に向かって解いていく.

- 同次変換行列の積で書くとコンパクト

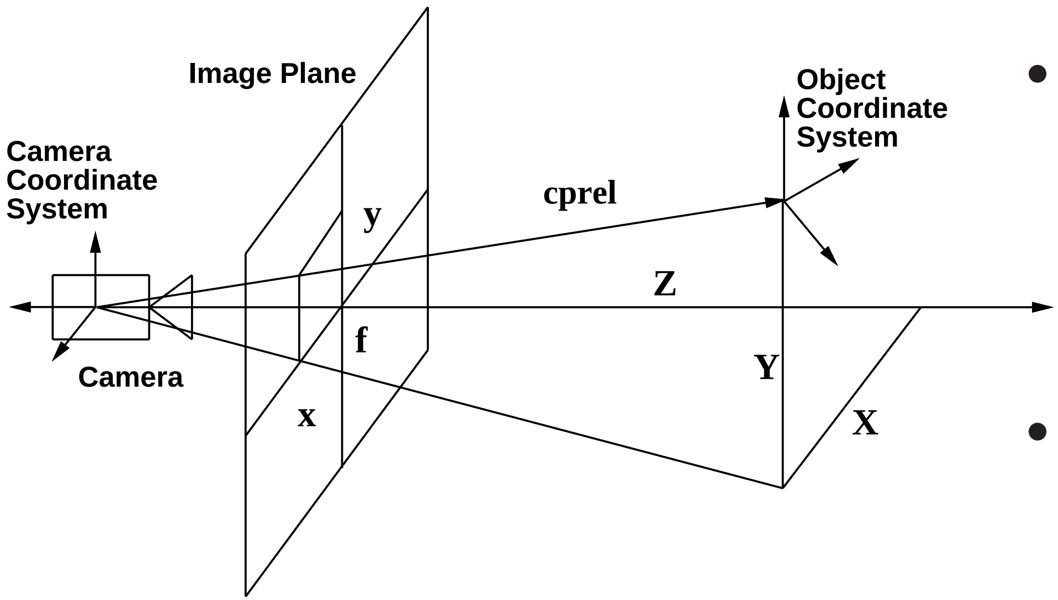
$$
{}^0\boldsymbol{T}_6 = {}^0\boldsymbol{T}_1{}^1\boldsymbol{T}_2 \cdots {}^5\boldsymbol{T}_6
$$

インバースキネマティクス (逆機構学)



- 手先の位置姿勢${}^0\boldsymbol{T}_6$を実現する関節角度θを求めること
- 非線形であり，解は一意ではない
- 例
  - 右利き・左利き
  - エルボーアップ・エルボーダウン

透視射影変換



- 幾何光学 (レンズのモデル)
  - 深さ Z，焦点距離 f

$$x = f\frac{X}{Z}, \quad y = f\frac{Y}{Z}$$

- 透視投影変換

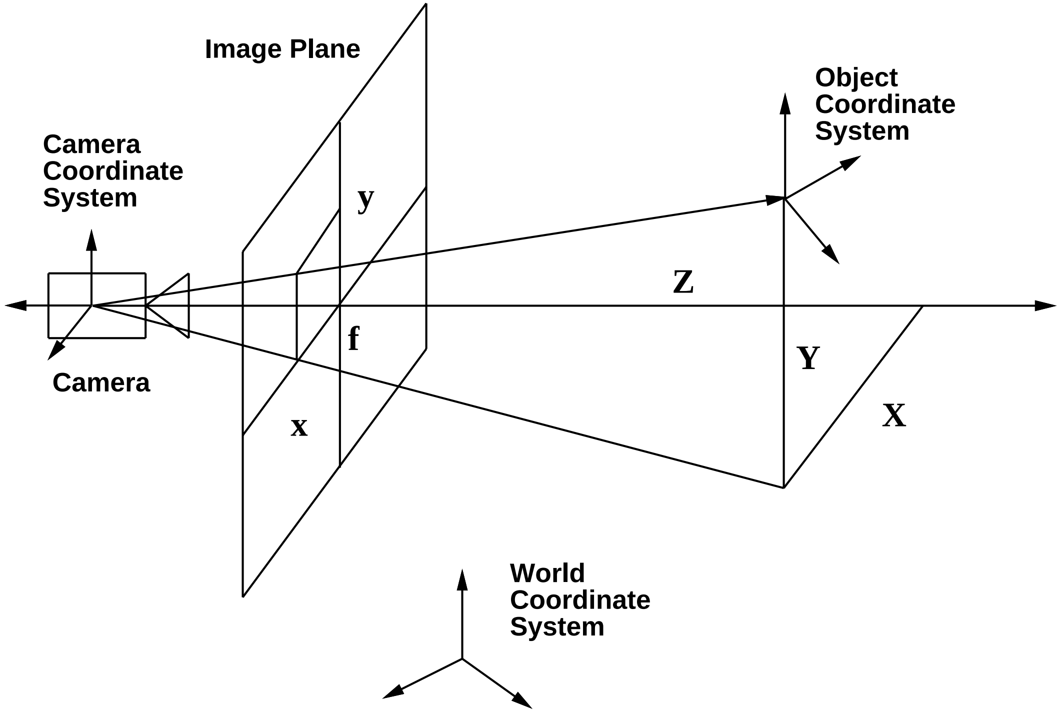
$$s\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 透視投影変換行列

$$A = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

  - CCD の縦横の解像度の違い，CCD 面のゆがみなどを考慮すると A はさらに複雑になる.

ビジョンシステム



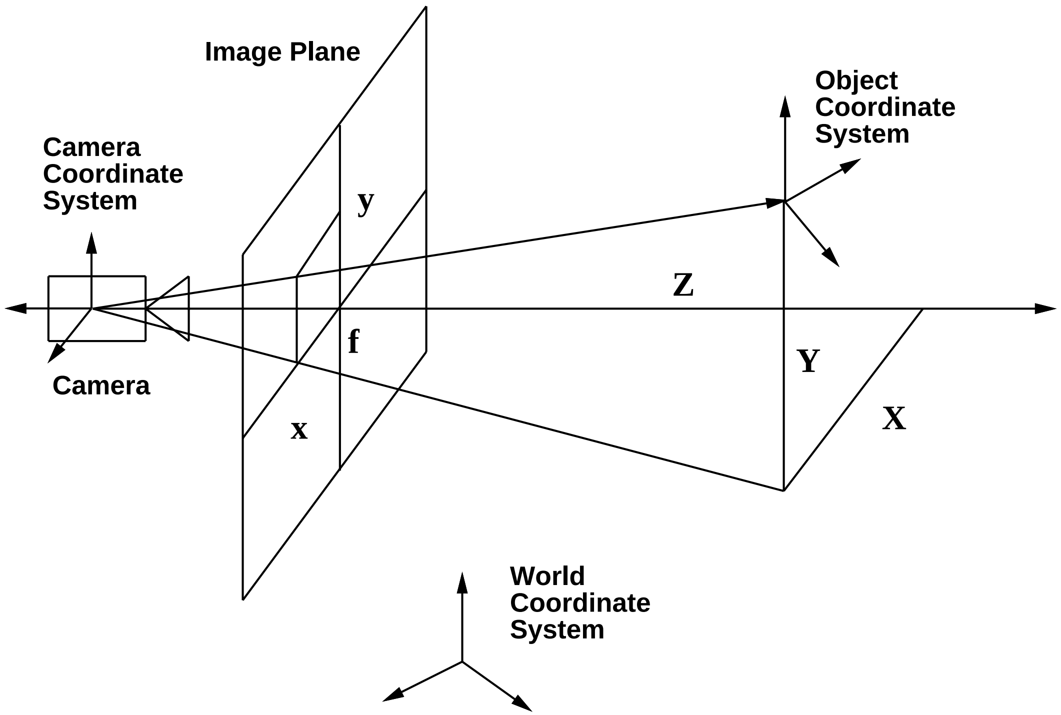
- 対象物とカメラの関係 $({}^{C}\boldsymbol{T}_O)$
  - 対象物の座標系において表現 ${}^{O}\boldsymbol{r}_i$ をもつ点は，カメラ座標系では

$$\begin{bmatrix} {}^{C}\boldsymbol{r}_i \\ 1 \end{bmatrix} = {}^{C}\boldsymbol{T}_O \begin{bmatrix} {}^{O}\boldsymbol{r}_i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad {}^{C}\boldsymbol{r}_i = \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix}$$

  - 撮像面上の位置

$$\begin{aligned} s_i \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{bmatrix} &= A{}^{C}\boldsymbol{T}_O \begin{bmatrix} {}^{O}\boldsymbol{r}_i \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= A({}^{W}\boldsymbol{T}_C)^{-1}{}^{W}\boldsymbol{T}_O \begin{bmatrix} {}^{O}\boldsymbol{r}_i \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

キャリブレーション



- 正確に測定された対象位置 $({}^W\boldsymbol{T}_O)$ と物体形状 $({}^O\boldsymbol{r}_i)$ に基づいて，カメラで物体を計測し (x_i, y_i)，カメラの内部パラメータ (A) および外部パラメータ $({}^W\boldsymbol{T}_C)$ を同定する問題.

$$s_i \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{bmatrix} = A({}^W\boldsymbol{T}_C)^{-1}\,{}^W\boldsymbol{T}_O \begin{bmatrix} {}^O\boldsymbol{r}_i \\ 1 \end{bmatrix}$$

- あとで詳しく説明する.

キャリブレーションを解くのに必要な線形代数の復習

- 最小 2 乗法
- 疑似逆行列
- 特異値分解

最小2乗法

- 冗長決定系: 未知数の数より方程式の数の方が多い連立方程式系

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} \qquad (\text{ただし}\, A : m \times n,\ m > n)$$

  – 一般にはすべての方程式を満たす解は存在しない
  – 残差を最小にする $\boldsymbol{x}$ を解と呼ぶ
  – 残差としては2ノルムの2乗が一般的: $e = \|\boldsymbol{y} - A\boldsymbol{x}\|^2$
  – 最小解は $\dfrac{\partial e}{\partial \boldsymbol{x}} = 0$ を満たす.

$$\frac{\partial e}{\partial \boldsymbol{x}} = -2A^T(\boldsymbol{y} - A\boldsymbol{x})$$

  – したがって

$$A^T(\boldsymbol{y} - A\boldsymbol{x}) = 0$$

  – A がフルランクなら A^TA が正則となり

$$\boldsymbol{x} = (A^TA)^{-1}A^T\boldsymbol{y}$$

  – 疑似逆行列

$$A^\dagger = (A^TA)^{-1}A^T$$

フルランク

- ランク (階数): 線形 (一次) 独立な行または列の数
- フルランク: $m \times n$ (ただし $m \geq n$) 行列 A のランクが n

$$A = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \ldots\ \boldsymbol{a}_n], \quad \mathrm{rank} A = n$$

- ベクトル $\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \ldots\ \boldsymbol{a}_n$ が線形独立

- ランク落ち: フルランクではない場合
- 連立方程式 $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ において A がランク落ちしている場合
  - たとえば $\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$ のとき

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{a}_1 x_1 + \boldsymbol{a}_2 x_2 + \boldsymbol{a}_3 x_3 + \cdots + \boldsymbol{a}_n x_n \\
&= \boldsymbol{a}_1(x_1 + x_3) + \boldsymbol{a}_2(x_2 + x_3) + \boldsymbol{a}_4 x_4 + \cdots + \boldsymbol{a}_n x_n \\
&= \hat{A}\hat{\boldsymbol{x}} \qquad (\hat{A} : m \times n - 1,\ \hat{\boldsymbol{x}} : n - 1 \times 1)
\end{aligned}$$

となり，x_1, x_2 と x_3 を分離できない.

- 連立方程式の係数行列がランク落ちすると解は一意に求まらない.

最小2乗法まとめと例

- 冗長決定系において誤差の2乗和を最小とする解

$$\text{Given } A \text{ and } \boldsymbol{y}, \text{ find } \boldsymbol{x} \text{ s.t. } \min_{x \in R^n} \|\boldsymbol{y} - A\boldsymbol{x}\|^2 \quad (A : m \times n, m > n)$$

  – (Aがフルランクのとき) 解:

$$\boldsymbol{x} = A^{\dagger}\boldsymbol{y} = (A^T A)^{-1} A^T \boldsymbol{y} \qquad A^{\dagger} : A \text{の疑似逆行列}$$

- 例 (直線の当てはめ): Given p_i and q_i, find a, b s.t.,

$$\min_{a,b} \sum_{i=1}^{N} (q_i - (ap_i + b))^2 = \min_{\boldsymbol{x}} \|\boldsymbol{y} - A\boldsymbol{x}\|^2$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} p_1 & 1 \\ p_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ p_N & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

最小2乗法の例

```
p_i: 0.000  0.500  1.000  1.500  2.000  2.500  3.000  3.500  4.000  4.500  5.000
q_i: 2.991  3.973  5.487  5.938  6.848  8.397  9.757  8.690  9.535 11.799 13.268
a:   1.877     b:  3.187
```