線形変換

$$y = Ax, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- この変換は点 x を点 y に写像する．
- x が 2 倍になれば y も 2 倍．
- $x = x_1 + x_2$ のとき $y = y_1 + y_2$．ただし $y_1 = Ax_1$，$y_2 = Ax_2$
- クイズ
  - この写像の様子を図を書いて説明せよ．(適当な三角形を考え，x として三角形の頂点をとってみよ．写像された三角形と元の三角形の関係は？)
  - A の固有値，固有ベクトルを求めよ．
  - 写像において，固有値，固有ベクトルはどのような意味をもつか？
  - 行列式の意味を説明せよ．

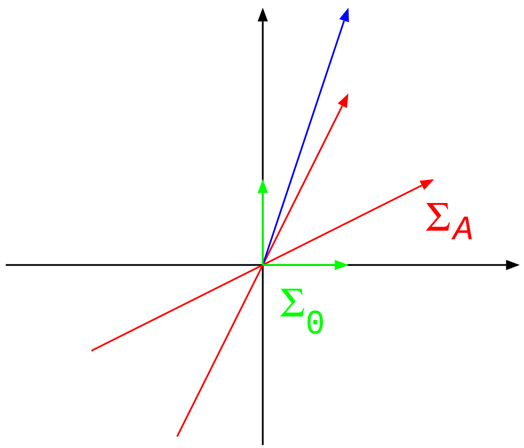
座標変換

$$y = Ax, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- 行列 A の各列を新しい座標系 Σ_A の基底ベクトルとする．元の座標系を Σ_0 とするとき，それぞれの座標系でベクトル $(1,3)$ を図に描け.
- 任意の点 p を行列 A で変換した点を q とおく.

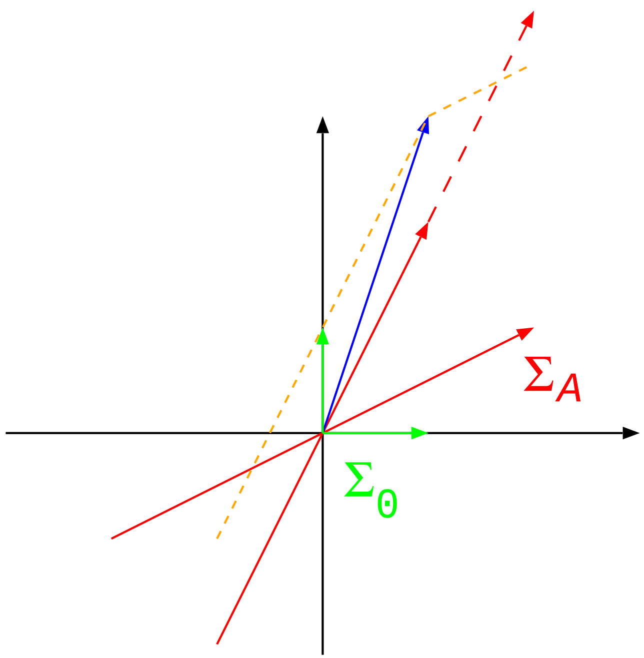
$$q = Ap$$

このとき，Σ_0 における p, q の表現と Σ_A における p, q の表現の関係を求めよ.



座標変換

ベクトルの表現



座標変換

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad p = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- Σ_0 での表現

$$p = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 同様に

$$p = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

- Σ_A での表現

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = A^{-1} p = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

線形変換

- 行列 B を
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$
とする．A と同様に B による線形写像を考察せよ.

- R を 2 次元の回転行列
$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$
とする．R による線形写像を考察せよ.

剛体の位置と姿勢

- 3次元空間内の剛体の位置・姿勢の表現方法
  - 基準座標系: $\Sigma_A = O_A$–$\{X_A, Y_A, Z_A\}$
  - 剛体座標系: $\Sigma_B = O_B$–$\{X_B, Y_B, Z_B\}$
  - O_B の位置ベクトル: ${}^A\boldsymbol{p}_B$
  - X_B, Y_B, Z_B の方向を向く単位ベクトルを Σ_A で表したもの: ${}^A\boldsymbol{x}_B, {}^A\boldsymbol{y}_B, {}^A\boldsymbol{z}_B$

  - Σ_A から見た剛体の位置: ${}^A\boldsymbol{p}_B$
  - Σ_A から見た剛体の姿勢: $\{{}^A\boldsymbol{x}_B, {}^A\boldsymbol{y}_B, {}^A\boldsymbol{z}_B\}$

- 回転行列
  - ${}^A\boldsymbol{R}_B = [{}^A\boldsymbol{x}_B\ {}^A\boldsymbol{y}_B\ {}^A\boldsymbol{z}_B]$
  - $({}^A\boldsymbol{R}_B)^T({}^A\boldsymbol{R}_B) = \boldsymbol{I}_3$
  - $({}^A\boldsymbol{R}_B)^{-1} = ({}^A\boldsymbol{R}_B)^T$

ベクトルの表現

- Σ_A と Σ_B の原点は一致しているとする
- あるベクトル $\boldsymbol{r}$
  - Σ_A から見たとき (Σ_A での表現): ${}^A\boldsymbol{r} = [{}^A r_x \ {}^A r_y \ {}^A r_z]^T$
  - Σ_B での表現: ${}^B\boldsymbol{r} = [{}^B r_x \ {}^B r_y \ {}^B r_z]^T$

$$ {}^A\boldsymbol{r} = {}^A\boldsymbol{x}_B {}^B r_x + {}^A\boldsymbol{y}_B {}^B r_y + {}^A\boldsymbol{z}_B {}^B r_z $$

$$ {}^A\boldsymbol{r} = {}^A\boldsymbol{R}_B {}^B\boldsymbol{r} $$

同様に，(Σ_A と Σ_B の立場を逆にすれば)

$$ {}^B\boldsymbol{r} = {}^B\boldsymbol{R}_A {}^A\boldsymbol{r} $$

- 上の関係は任意の $\boldsymbol{r}$ について成り立つから

$$ ({}^A\boldsymbol{R}_B)({}^B\boldsymbol{R}_A) = \boldsymbol{I}_3 $$

座標系の関係

- Σ_A，Σ_B と原点が一致している第3の座標系 Σ_C
- $\boldsymbol{r}$ の Σ_C における表現 ${}^C\boldsymbol{r}$

$$ {}^B\boldsymbol{r} = {}^B\boldsymbol{R}_C {}^C\boldsymbol{r}, \quad {}^A\boldsymbol{r} = {}^A\boldsymbol{R}_C {}^C\boldsymbol{r} $$

$$ {}^A\boldsymbol{R}_C {}^C\boldsymbol{r} = {}^A\boldsymbol{r} = {}^A\boldsymbol{R}_B {}^B\boldsymbol{r} = {}^A\boldsymbol{R}_B {}^B\boldsymbol{R}_C {}^C\boldsymbol{r} $$

$$ {}^A\boldsymbol{R}_C = {}^A\boldsymbol{R}_B {}^B\boldsymbol{R}_C, \quad {}^A\boldsymbol{R}_B = ({}^C\boldsymbol{R}_A)^T {}^C\boldsymbol{R}_B $$

$$ {}^A\boldsymbol{R}_B = \begin{bmatrix} ({}^C\boldsymbol{x}_A)^T {}^C\boldsymbol{x}_B & ({}^C\boldsymbol{x}_A)^T {}^C\boldsymbol{y}_B & ({}^C\boldsymbol{x}_A)^T {}^C\boldsymbol{z}_B \\ ({}^C\boldsymbol{y}_A)^T {}^C\boldsymbol{x}_B & ({}^C\boldsymbol{y}_A)^T {}^C\boldsymbol{y}_B & ({}^C\boldsymbol{y}_A)^T {}^C\boldsymbol{z}_B \\ ({}^C\boldsymbol{z}_A)^T {}^C\boldsymbol{x}_B & ({}^C\boldsymbol{z}_A)^T {}^C\boldsymbol{y}_B & ({}^C\boldsymbol{z}_A)^T {}^C\boldsymbol{z}_B \end{bmatrix} $$

同次変換行列

- 2 つの座標系 Σ_A, Σ_B(原点が一致していない)
- Σ_A に対する Σ_B の位置: ${}^A\boldsymbol{p}_B$
- Σ_A に対する Σ_B の姿勢: ${}^A\boldsymbol{R}_B$
- Σ_B に関して ${}^B\boldsymbol{r}$ で表示された点を Σ_A で表示

$$ {}^A\boldsymbol{r} = {}^A\boldsymbol{R}_B {}^B\boldsymbol{r} + {}^A\boldsymbol{p}_B $$

$$ \begin{bmatrix} {}^A\boldsymbol{r} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A\boldsymbol{R}_B & {}^A\boldsymbol{p}_B \\ 0\ \ 0\ \ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^B\boldsymbol{r} \\ 1 \end{bmatrix} $$

- 同次変換行列

$$ {}^A\boldsymbol{T}_B = \begin{bmatrix} {}^A\boldsymbol{R}_B & {}^A\boldsymbol{p}_B \\ 0\ \ 0\ \ 0 & 1 \end{bmatrix} $$

- [**注意！**]:

$$ {}^A\boldsymbol{r} \text{ と } \begin{bmatrix} {}^A\boldsymbol{r} \\ 1 \end{bmatrix},\ {}^B\boldsymbol{r} \text{ と } \begin{bmatrix} {}^B\boldsymbol{r} \\ 1 \end{bmatrix} \text{ を同一視することがある.} $$

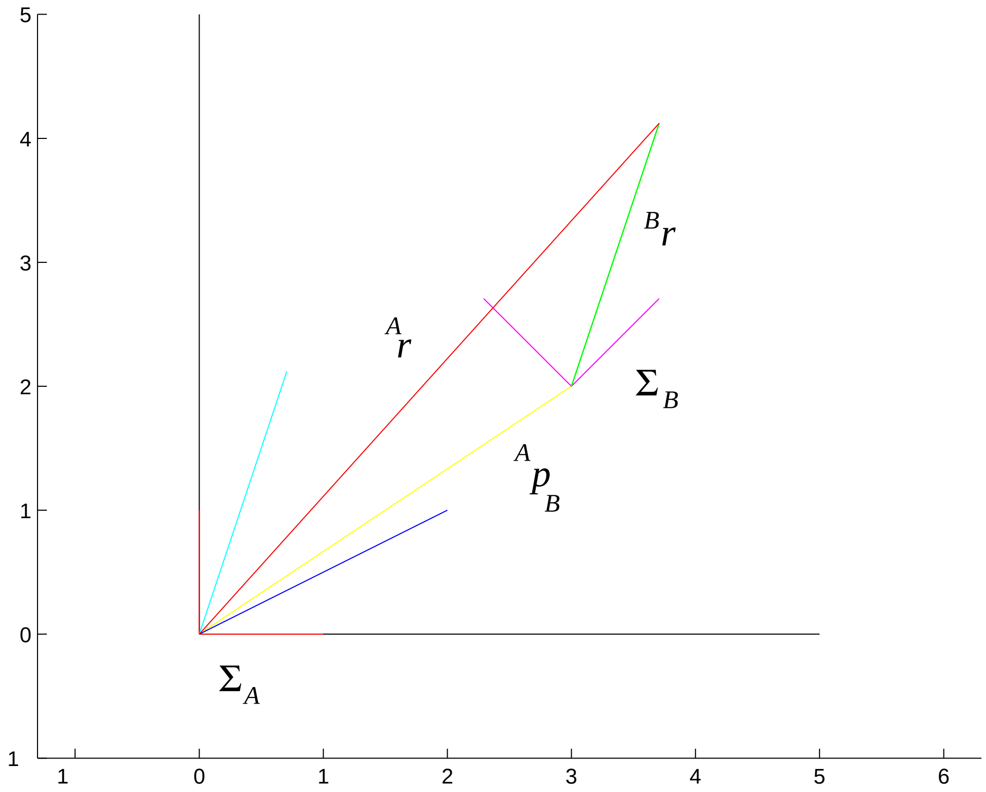
同次変換

- 同次変換

$$ {}^A\boldsymbol{r} = {}^A\boldsymbol{T}_B {}^B\boldsymbol{r} $$

- 例
  - Σ_B は Σ_A と原点が一致していて，Z_A まわりに α 回転した位置にある．このとき ${}^A\boldsymbol{T}_B$ を求めよ．
  - Σ_B は Σ_A に対して Y_A 方向に 2，Z_A 方向に 1 だけ並進した位置にある．このとき ${}^A\boldsymbol{T}_B$ を求めよ．

同次変換の分解



- 同次変換行列

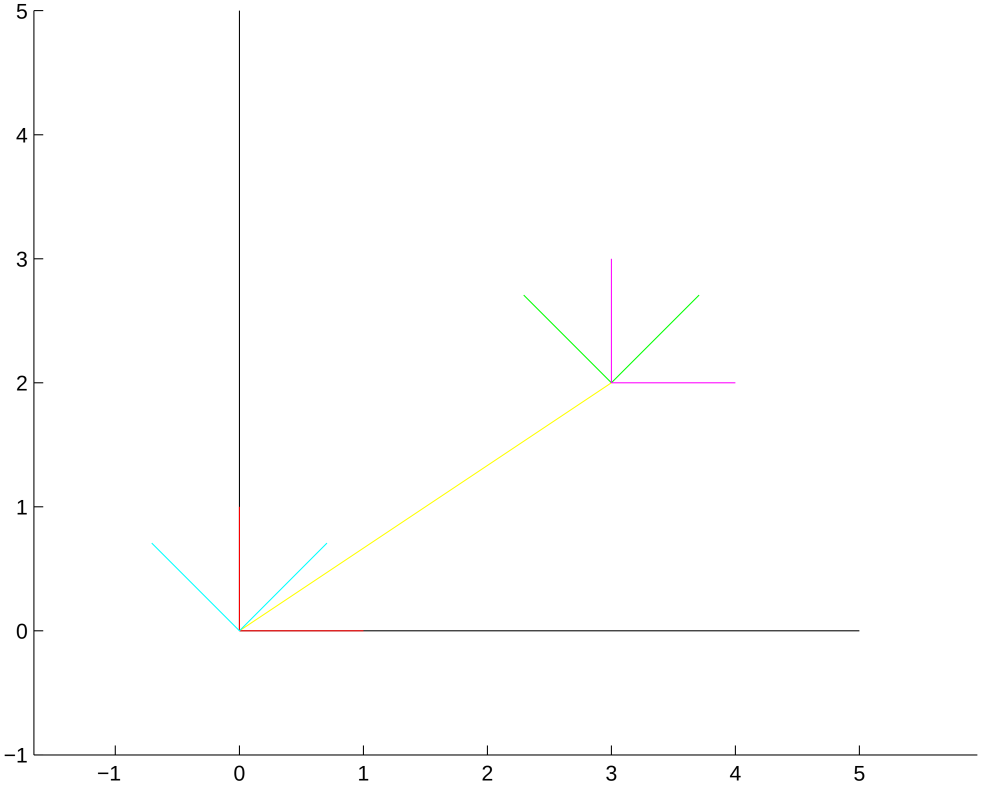
$$\begin{bmatrix} {}^{A}\boldsymbol{R}_B & {}^{A}\boldsymbol{p}_B \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_3 & {}^{A}\boldsymbol{p}_B \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{A}\boldsymbol{R}_B & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix}$$

- 同次変換

$$^{A}\boldsymbol{r} = {}^{A}\boldsymbol{T}_B {}^{B}\boldsymbol{r}$$

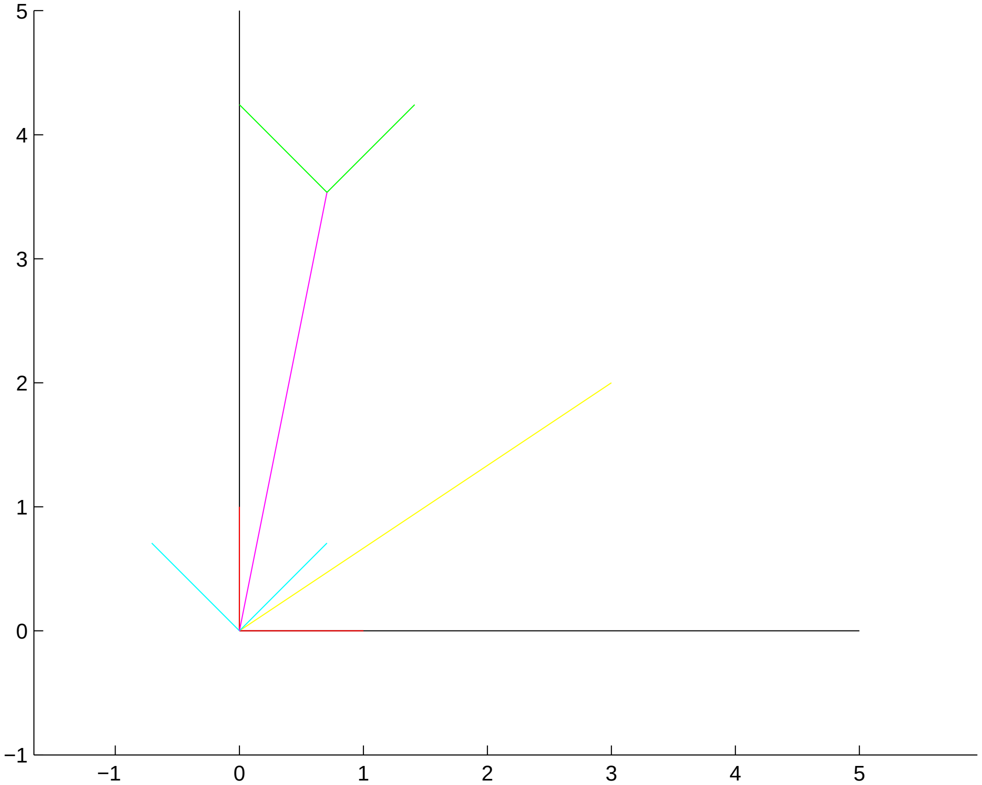
- ベクトルの回転・並進としての解釈
  - Σ_A において $^{B}\boldsymbol{r}$ で表現される点を Σ_A に関して $^{A}\boldsymbol{R}_B$ 回転し，それを Σ_A に関して $^{A}\boldsymbol{p}_B$ 並進すると $^{A}\boldsymbol{r}$ を得る．
  - Σ_B における表現が $^{B}\boldsymbol{r}$ である点の Σ_A における表現は $^{A}\boldsymbol{r}$ である．

座標系の回転・並進としての解釈



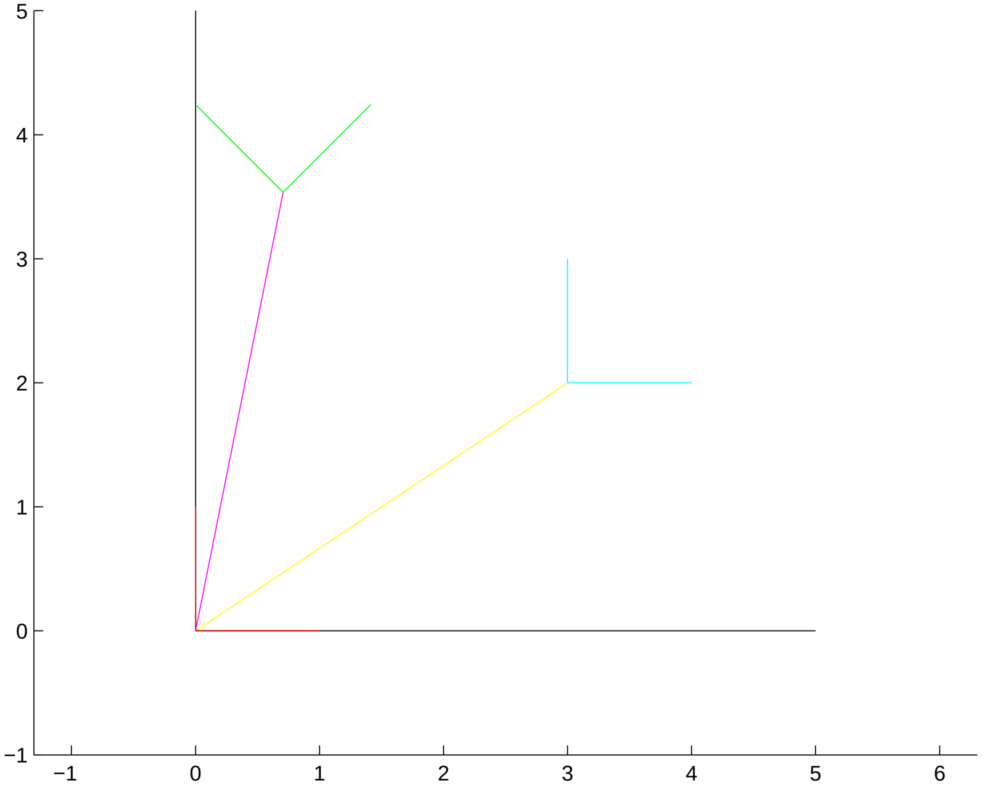
- Σ_A を Σ_A に関して ${}^A\boldsymbol{R}_B$ 回転し，それを Σ_A に関して ${}^A\boldsymbol{p}_B$ 並進すると Σ_B を得る．
- Σ_A を Σ_A に関して ${}^A\boldsymbol{p}_B$ 並進し，その場で ${}^A\boldsymbol{R}_B$ 回転すると Σ_B を得る．

座標系の回転・並進としての解釈 [注意 1]



- Σ_A を Σ_A に関して ${}^A\boldsymbol{R}_B$ 回転し，回転後の座標系 Σ'_A に関して ${}^{A'}\boldsymbol{p}_B$ 並進しても Σ_B にはならない！

座標系の回転・並進としての解釈 [注意 2]



- Σ_A を Σ_A に関して ${}^A\boldsymbol{p}_B$ 並進し，Σ_A に関して ${}^A\boldsymbol{R}_B$ 回転しても Σ_B にはならない！

同次変換の積

- 3つの座標系$\Sigma_A, \Sigma_B, \Sigma_C$があり，$\Sigma_A$と$\Sigma_B$の関係が${}^A\boldsymbol{T}_B$，$\Sigma_B$と$\Sigma_C$の関係が${}^B\boldsymbol{T}_C$で与えられるとき，$\Sigma_A$と$\Sigma_C$の関係は？

$$
{}^A\boldsymbol{T}_C = {}^A\boldsymbol{T}_B {}^B\boldsymbol{T}_C
$$

- ここで

$$
{}^A\boldsymbol{T}_B = \begin{bmatrix} {}^A\boldsymbol{R}_B & {}^A\boldsymbol{p}_B \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_3 & {}^A\boldsymbol{p}_B \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^A\boldsymbol{R}_B & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix}
$$

つまり

$$
{}^A\boldsymbol{T}_C = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_3 & {}^A\boldsymbol{p}_B \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^A\boldsymbol{R}_B & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_3 & {}^B\boldsymbol{p}_C \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^B\boldsymbol{R}_C & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix}
$$

に注意する．

同次変換の積の解釈

1. 左から解釈する方法
   (a) Σ_A を Σ_A に関して ${}^A\boldsymbol{p}_B$ 並進
   (b) それをその場で ${}^A\boldsymbol{R}_B$ 回転 $\longrightarrow$ Σ_B を得る
   (c) Σ_B を Σ_B に関して ${}^B\boldsymbol{p}_C$ 並進
   (d) それをその場で ${}^B\boldsymbol{R}_C$ 回転 $\longrightarrow$ Σ_C を得る
2. 右から解釈する方法
   (a) Σ_A を Σ_A に関して ${}^B\boldsymbol{R}_C$ 回転
   (b) それを Σ_A に関して ${}^B\boldsymbol{p}_C$ 並進 $\longrightarrow$ Σ'_B を得る
   (c) Σ'_B を Σ_A に関して ${}^A\boldsymbol{R}_B$ 回転
   (d) それを Σ_A に関して ${}^A\boldsymbol{p}_B$ 並進 $\longrightarrow$ Σ_C を得る

同次変換の積の例題，逆変換

- 例題

$$
{}^{A}\boldsymbol{T}_{B} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 & 2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^{B}\boldsymbol{T}_{C} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

左から解釈する場合と右から解釈する場合の図を書き，確認せよ.

- 逆変換

$$
{}^{B}\boldsymbol{T}_{A} = ({}^{A}\boldsymbol{T}_{B})^{-1} = \begin{bmatrix} ({}^{A}\boldsymbol{R}_{B})^{T} & -({}^{A}\boldsymbol{R}_{B})^{T\,A}\boldsymbol{p}_{B} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}
$$