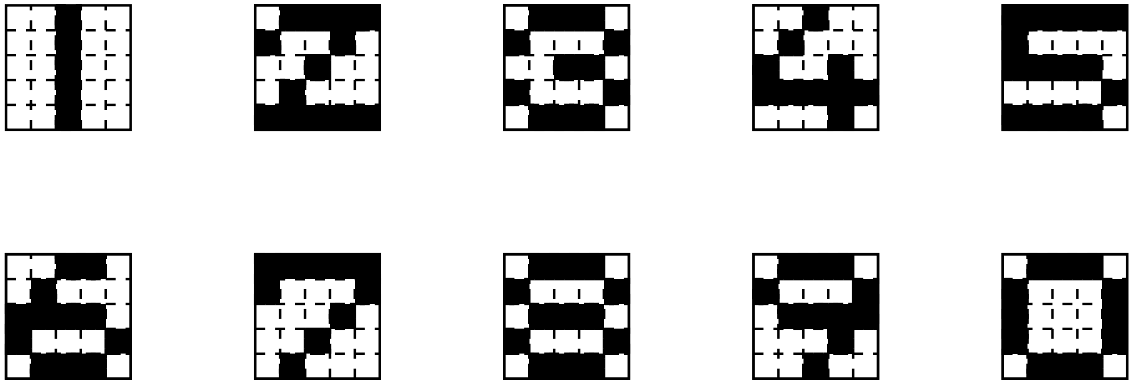
パターン認識

- パターン認識: 「パターンをそれが属すべきカテゴリに対応づける操作」
  - **パターン**: 「空間的または時間的に観測可能な事象であって，観測された対象どうしが同一であるか(または似ているか)否かを判定できるような性質を備えているもの」
  - **カテゴリ**(または**クラス**): 「パターン認識の結果，同等とみなされるパターンの集合概念」
- パターン認識の過程
  - **観測**: 入力パターンを認識系の内部に取り込む操作
  - **前処理**: 後段の処理をしやすくするための予備的処理
  - **特徴抽出**: カテゴリの選択に役立つようなパターン特有の性質を担うごく少数の特徴量(数値，記号)の組(特徴パラメータ)を取り出す.
  - **決定**: 抽出された特徴パラメータの値を用いて，入力パターンが所属するとみなされるカテゴリをきめる.
- パターン空間
  - **パターンベクトル**: パターンを表す n 個の数値の組

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

  - **パターン空間**: パターンベクトルのつくる空間．もともとよく似ていたパターンはパターン空間の中でも近くにある.
- 特徴空間
  - **特徴ベクトル**: パターンに関する本質的な情報を含む少数個の数値の組．**位相**を崩さずに次元数を極力減らす.

特徴ベクトルと特徴空間の例



5×5 メッシュによる 2 値パターン

- パターン

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_{25})$$

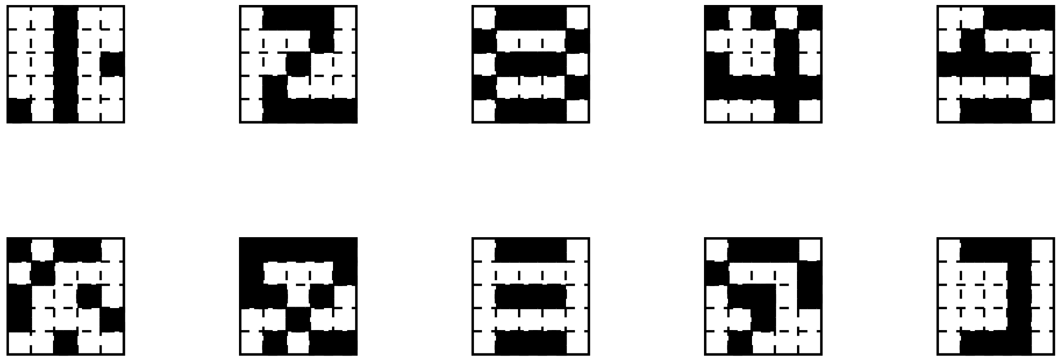
- 特徴量

$$\begin{cases} x_j = 1 & (\text{黒: 文字部分}) \\ x_j = 0 & (\text{白: 背景部分}) \end{cases} \quad (1 \leq j \leq 25)$$

- パターンの組み合わせ: $2^{25} = 33554432$ 通り
- 出力カテゴリ: 0 から 9 までの数字

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{10}\} \quad (c = 10)$$

決定則の例

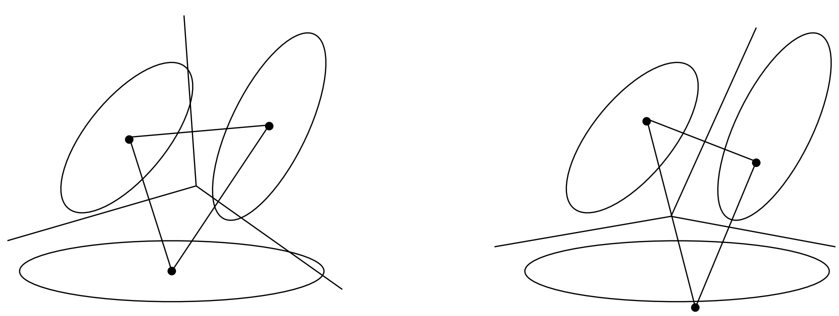


入力パターン

- **全数記憶方式**: 33554432通りのすべてのパターンの参照テーブルをつくる.
  - もっとも簡単な識別法
  - 記憶容量，テーブル作成作業が膨大
- **最近傍決定則**: 入力パターンともっとも距離の近いプロトタイプの属するカテゴリを選ぶ.

$$\min_{p=1,\cdots,n}\{D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_p)\} = D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_k) \ \Rightarrow \ \boldsymbol{x}\in\omega_k$$

  - 特徴空間の分割法 (3と8は似ている)
  - プロトタイプの選び方 (6と回転した9の識別)



領域分割とプロトタイプ

重みベクトル

- 2分識別器(正のクラスと負のクラスを識別):

$$f : X \subset R^n \to R \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} \text{if} \ \ \boldsymbol{x} \in P : & f(\boldsymbol{x}) \geq 0 \\ \text{otherwise} : & f(\boldsymbol{x}) < 0 \end{cases}$$

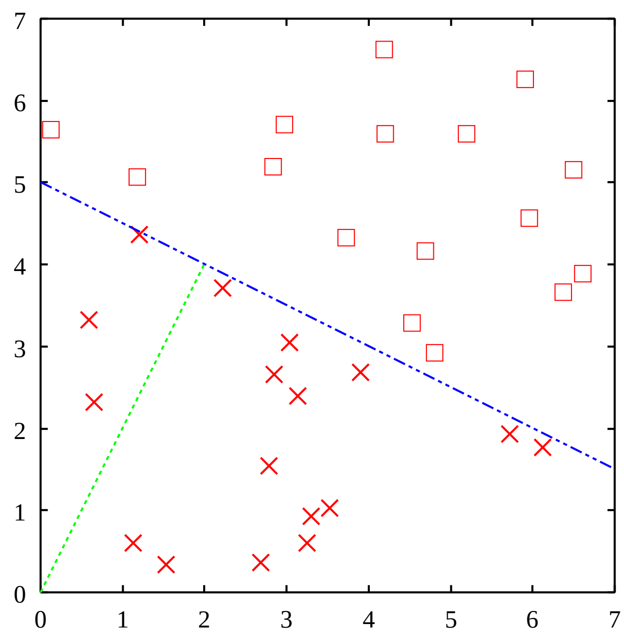
ただし $P \subset X$ は正のクラス

- **線形識別器**

$$f(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{x} \rangle + b = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i + b$$

ただし $(\boldsymbol{w}, b) \in (R^n, R)$ はパラメータ

- 線形識別可能性: 線形識別器でカテゴライズ可能かどうか
- 識別面: R^n における R^{n-1} 超平面
  - パラメータ数: $n+1$
  - n 次元は R^n における平面の法線ベクトル $\boldsymbol{w}$ の次元
  - 1次元は平面の原点からの距離 b



- F. Rosenblatt: The perceptron: a probabilistic model for information storage and organization in the brain, *Psychological Review*, 65: 386-408, 1959 1960.
- M. L. Minsky and S. A. Papert: Perceptrons, MIT Press, 1969. Expanded Edition 1990.

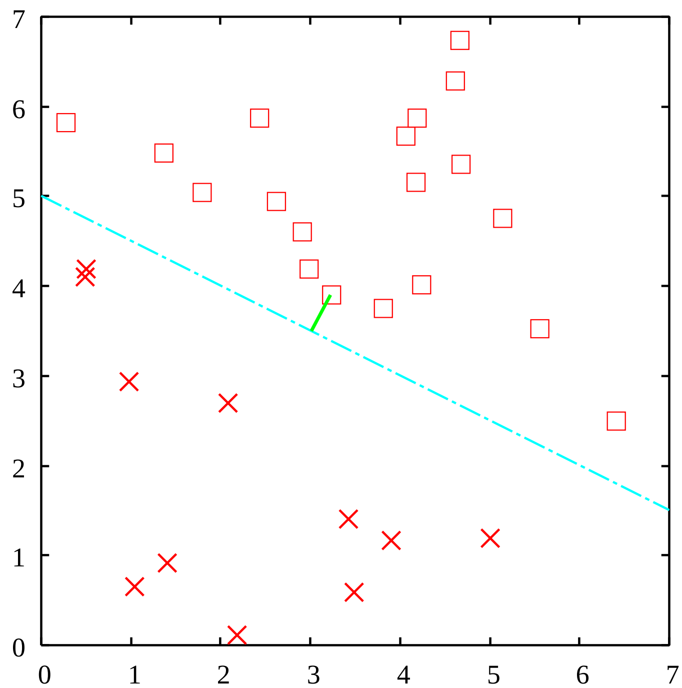
- 入力空間: $X \subset R^n$
- 出力カテゴリ: $Y = -1, 1$
- トレーニングデータ: $S = ((\boldsymbol{x}_1, y_1), \ldots, (\boldsymbol{x}_\ell, y_\ell)) \subset (X \times Y)^\ell$
- **パーセプトロン**:
  Given linearly separable training set S and learning rate $\eta > 0$
  $\boldsymbol{w}_0 = \mathbf{0}; b_0 = 0; k = 0$
  $R = \max_{1 \le i \le \ell} \|\boldsymbol{x}_i\|$
  do
      for $i = 1$ to ℓ
          if $y_i(\langle \boldsymbol{w}_k, \boldsymbol{x}_i \rangle + b_k) \le 0$ then
              $\boldsymbol{w}_{k+1} = \boldsymbol{w}_k + \eta y_i \boldsymbol{x}_i$
              $b_{k+1} = b_k + \eta y_i R^2$
              $k = k + 1$
          end if
      end for
  until no mistakes made within the for loop
  return $k, (\boldsymbol{w}_k, b_k)$ where k is the number of mistakes

マージン

- 超平面 $(\boldsymbol{w}, b)$ に関するトレーニングデータ $(\boldsymbol{x}_i, y_i)$ のマージン

$$\gamma_i = y_i(\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}_i \rangle + b)$$

- $\gamma_i > 0$ ならば $(\boldsymbol{x}_i, y_i)$ に関して正しい識別



- 超平面 $(\boldsymbol{w}, b)$ に関するトレーニングセット S のマージン: トレーニングデータに関するマージンの最小値
- トレーニングセット S のマージン: すべての超平面 $(\boldsymbol{w}, b)$ に関するトレーニングセット S のマージンの最小値

収束定理

- **定理**: (Novikoff) Let S be a non-tribial training set, and let

$$R = \max_{1 \leq i\ell} \|\boldsymbol{x}_i\|.$$

Suppose that there exists a vector $\boldsymbol{w}_{opt}$ such that $\|\boldsymbol{w}_{opt}\| = 1$ and

$$y_i(\langle \boldsymbol{w}_{opt}, \boldsymbol{x}_i \rangle + b_{opt}) \geq \gamma$$

for $1 \leq i\ell$. Then the number of mistakes made by the on-line perceptron algorithm on S is at most

$$\left(\frac{2R}{\gamma}\right)^2.$$

- 間違いの回数に上限 $\Longrightarrow$ 有限回の繰り返しで収束
- 線形識別可能性を仮定
- 線形識別可能でなければ修正を繰り返し収束しない
- 線形識別可能性の判断には使えない
- 途中で打ち切った場合，そのときの重みが最適かどうかわからない

誤差評価に基づく学習

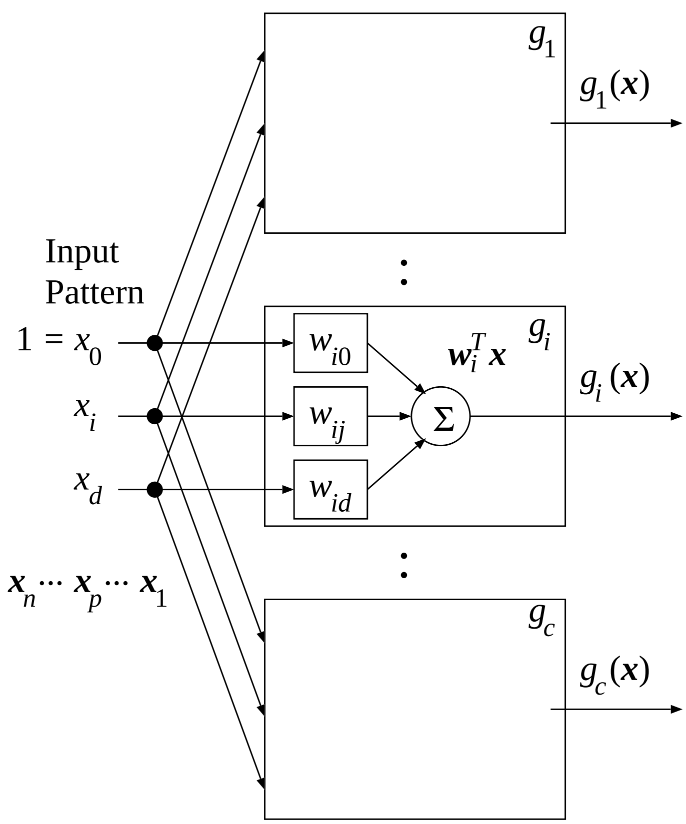
- カテゴリ: $\omega_1, \cdots, \omega_c$
- 学習パターン: $\mathcal{X} = \{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$
- 教師ベクトル: $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n$

$$\boldsymbol{b}_p = [b_{1p}, \cdots, b_{cp}]^T$$

- 出力ベクトル: $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_p) = [g_1(\boldsymbol{x}_p), \cdots, g_c(\boldsymbol{x}_p)]^T$
- 線形識別関数

$$g_i(\boldsymbol{x}_p) = w_{i0} + \sum_{j=1}^{d} w_{ij} x_{pj} = \boldsymbol{w}_i^T \boldsymbol{x}_p$$

$$\boldsymbol{w}_i = [w_{i0}, w_{i1}, \cdots, w_{id}]^T, \quad \boldsymbol{x} = [1, x_{p1}, \cdots, x_{pd},]^T$$



評価関数

- 誤差: $\boldsymbol{\varepsilon}_p = [\varepsilon_{1p}, \cdots, \varepsilon_{cp}]^T = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_p) - \boldsymbol{b}_p$

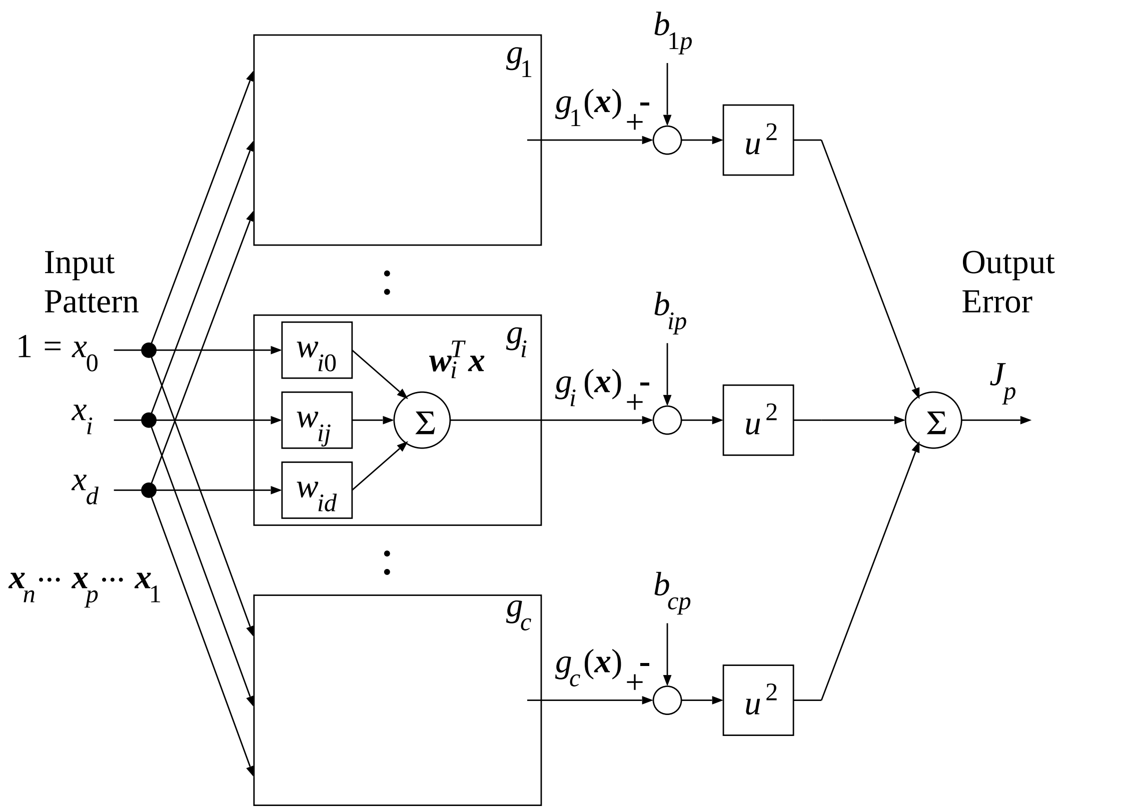
$$\varepsilon_{ip} = g_i(\boldsymbol{x}_p) - b_{ip}$$

- パターン $\boldsymbol{x}_p$ に対する評価関数: J_p

$$J_p(\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_c) = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\varepsilon}_p\|^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{c} \varepsilon_{ip}^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{c}(\boldsymbol{w}_i^T \boldsymbol{x}_p - b_{ip})^2$$

- 全パターンに対する評価関数: J

$$J(\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_c) = \sum_{p=1}^{n} J_p(\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_c) = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}\sum_{i=1}^{c}(\boldsymbol{w}_i^T \boldsymbol{x}_p - b_{ip})^2$$



最適重み

- 最適重み: 評価関数 J を最小にする $\boldsymbol{w}_i$ $(i = 1, \ldots, c)$

$$\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{w}_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, c)$$

- 全パターンに対する評価関数: J

$$J(\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_c) = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{n} \sum_{i=1}^{c} (\boldsymbol{w}_i^T \boldsymbol{x}_p - b_{ip})^2$$

- 最適重み $\boldsymbol{w}_i$ は次式をみたす

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{w}_i} = \sum_{p=1}^{n} (\boldsymbol{w}_i^T \boldsymbol{x}_p - b_{ip}) \boldsymbol{x}_p = [\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n] \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_i^T \boldsymbol{x}_1 - b_{i1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{w}_i^T \boldsymbol{x}_n - b_{in} \end{bmatrix} \\ &= [\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n] \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n^T \end{bmatrix} \boldsymbol{w}_i - \begin{bmatrix} b_{i1} \\ \vdots \\ b_{in} \end{bmatrix} \right) = X^T (X \boldsymbol{w}_i - \boldsymbol{b}_i) \end{aligned}$$

ただし (X は**パターン行列**と呼ばれる)

$$X = [\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n]^T, \quad \bar{\boldsymbol{b}}_i = [b_{i1}, \cdots, b_{in}]^T$$

[**注意:**] $\bar{\boldsymbol{b}}_i$ は教師ベクトル $\boldsymbol{b}_p$ とは以下の関係がある.

$$[\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n] = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{c1} & \cdots & b_{cn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{b}}_1^T \\ \vdots \\ \bar{\boldsymbol{b}}_c^T \end{bmatrix}$$

- 最適重み

$$\boldsymbol{w}_i = (X^T X)^{-1} X^T \boldsymbol{b}_i$$

- **最急降下法** (パターンが提示されるたびに修正を行う)

$$\boldsymbol{w}_i' = \boldsymbol{w}_i - \rho \frac{\partial J_p}{\partial \boldsymbol{w}_i} \quad (i = 1, \ldots, c)$$

$$J_p(\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_c) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{c} (\boldsymbol{w}_i^T \boldsymbol{x}_p - b_{ip})^2$$

ここで $\varepsilon_{ip} = \boldsymbol{w}_i^T \boldsymbol{x}_p - b_{ip}$ に注意すると

$$\frac{\partial J_p}{\partial \boldsymbol{w}_i} = \frac{\partial J_p}{\partial \varepsilon_{ip}} \frac{\partial \varepsilon_{ip}}{\partial \boldsymbol{w}_i} = \varepsilon_{ip} \boldsymbol{x}_p$$

であるから

$$\boldsymbol{w}_i' = \boldsymbol{w}_i - \rho \varepsilon_{ip} \boldsymbol{x}_p = \boldsymbol{w}_i - \rho(\boldsymbol{w}_i^T \boldsymbol{x}_p - b_{ip}) \boldsymbol{x}_p \quad (i = 1, \ldots, c)$$

を得る．これを **Widrow-Hoff の学習則**という．

パーセプトロン(再)

- **学習:** $\mathcal{X}_i$ に属するすべての $\boldsymbol{x}$ に対して

$$g_i(\boldsymbol{x}) > g_j(\boldsymbol{x}) \quad (j = 1, \cdots, c,\ j \neq i)$$

が成り立つように重み $\boldsymbol{w}_i$ を決定すること.

- 学習アルゴリズム

1. 重みベクトル $\boldsymbol{w}_i$ の初期値を適当に設定する.
2. $\mathcal{X}_i$ のなかから学習パターンをひとつ選ぶ.
3. 識別関数

$$g_i(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w}_i^T \boldsymbol{x}$$

によって識別を行い, 誤識別を生じた場合 (ω_i に属するパターンを ω_j と誤ったとする) のみ次式により重みベクトルを修正する.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w}_i' &= \boldsymbol{w}_i + \rho \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{w}_j' &= \boldsymbol{w}_j - \rho \boldsymbol{x} \end{aligned}$$

4. 上の処理, 2, 3 を $\mathcal{X}_i$ の全パターンに対して繰り返す.
5. $\mathcal{X}_i$ の全パターンを正しく識別できたら終了, 誤りがあるときには 2 に戻る.

誤差評価とパーセプトロン

- 教師信号

$$b_{ip} = \begin{cases} 1 & (\boldsymbol{x}_p \in \omega_i) \\ 0 & (\boldsymbol{x}_p \notin \omega_i) \end{cases} \qquad (i = 1, \cdots, c)$$

- 出力にしきい値関数T_iを施す

$$T_i(u) = \begin{cases} 1 & (u > 0) \\ 0 & (u \leq 0) \end{cases} \qquad (i = 1, \cdots, c)$$

- Widrow-Hoff 学習規則(パターン$\boldsymbol{x}_p \in \omega_i$を$\omega_j$と誤認識したとき)

$$\begin{cases} \boldsymbol{w}_i' = \boldsymbol{w}_i + \rho(g_i(\boldsymbol{x}_p) - b_{ip})\boldsymbol{x}_p = \boldsymbol{w}_i + \rho\boldsymbol{x}_p \\ \boldsymbol{w}_j' = \boldsymbol{w}_j + \rho(g_j(\boldsymbol{x}_p) - b_{jp})\boldsymbol{x}_p = \boldsymbol{w}_j - \rho\boldsymbol{x}_p \end{cases}$$

- パーセプトロンは Widrow-Hoff 学習規則の一種 !?