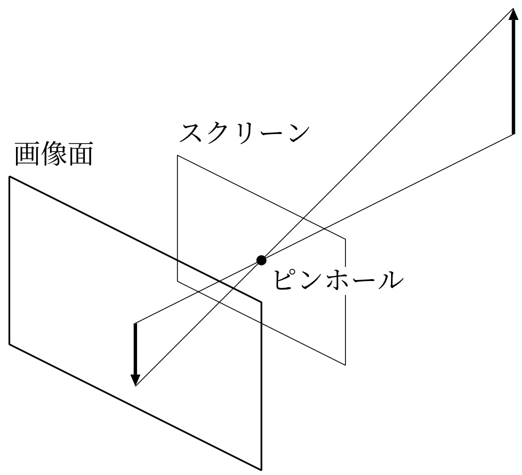
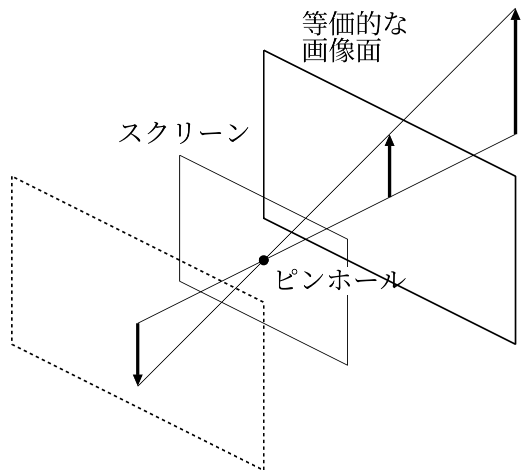
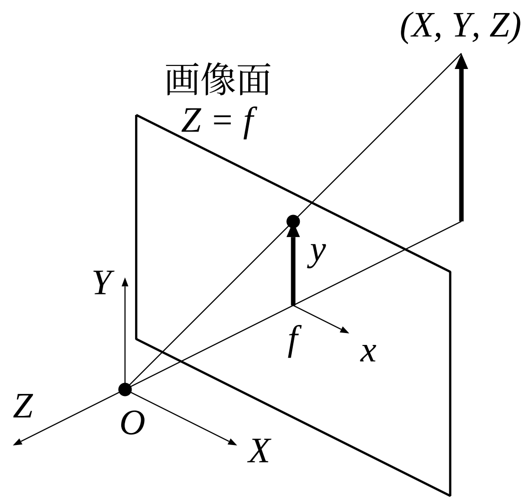
透視投影



(a) ピンホールモデル



(b) 等価なモデル

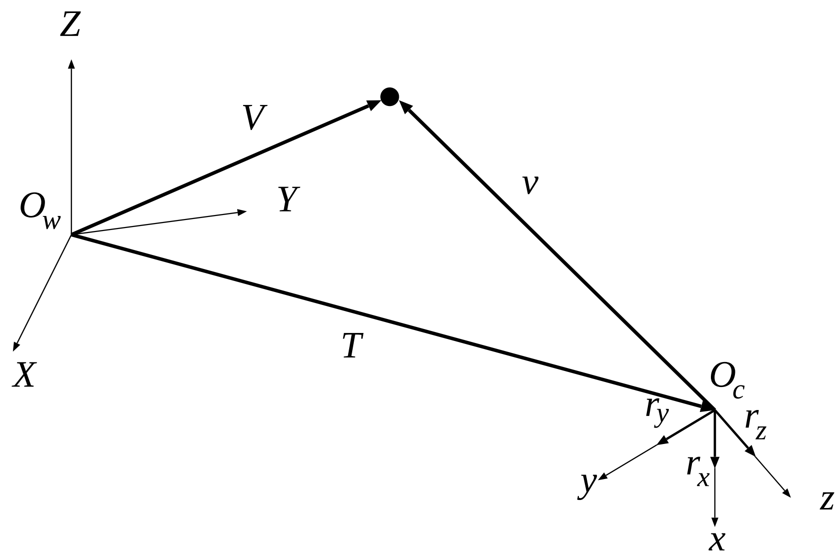


(c) 透視変換

透視変換

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f\dfrac{X}{Z} \\ f\dfrac{Y}{Z} \end{bmatrix}$$

画像とカメラ位置・姿勢の関係



- ワールド座標系: $\Sigma_w(O_w - XYZ)$
- カメラ座標系: $\Sigma_c(O_c - xyz)$
- カメラ座標系の原点 O_c: T
- カメラ座標系の x, y, z 軸方向の単位ベクトル: r_x, r_y, r_z
- カメラ座標系においてベクトル ${}^cV = ({}^cX, {}^cY, {}^cZ)^T$ で与えられる点は，ワールド座標系では

$$ {}^wV = {}^cXr_x + {}^cYr_y + {}^cZr_z + T = R{}^cV + T $$

ここで

$$ R = [r_x \ r_y \ r_z] $$

は回転行列.

同次変換

- 撮像モデル:

$$\begin{bmatrix} x \\ \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f\dfrac{{}^cX}{{}^cZ} \\ f\dfrac{{}^cY}{{}^cZ} \end{bmatrix}$$

- 画像平面上のベクトルとカメラ座標系におけるベクトルの拡張

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} {}^cX \\ {}^cY \\ {}^cZ \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 同次変換

$$s\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^cX \\ {}^cY \\ {}^cZ \\ 1 \end{bmatrix}$$

ただし左辺の s はスカラーで，左辺の第3要素が1となるように定めるものとする

- 剛体変換

$${}^wV = {}^cXr_x + {}^cYr_y + {}^cZr_z + T = R^cV + T$$

- 同次変換: v, V を拡張して

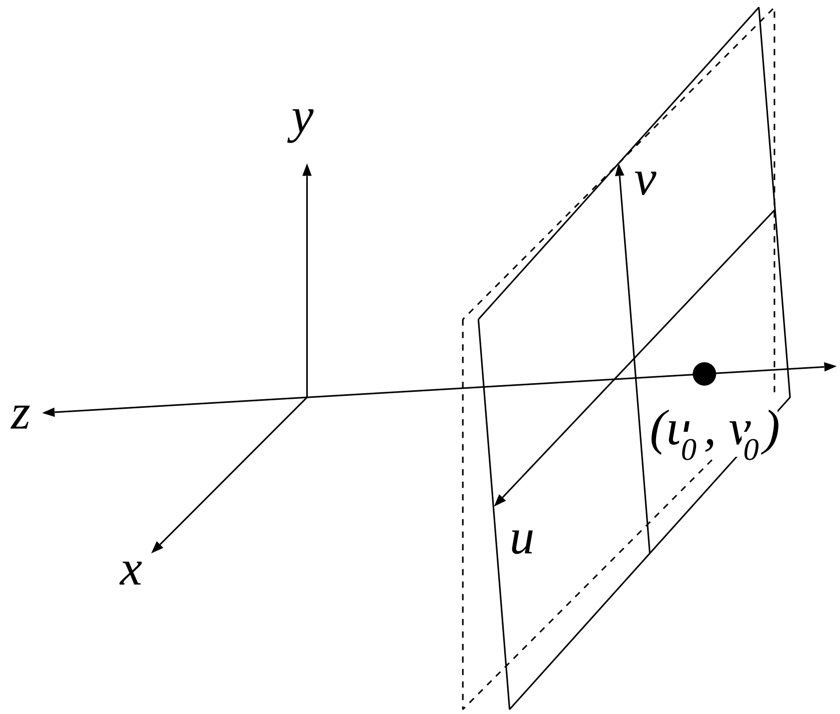
$${}^wV = D^cV, \quad D = \begin{bmatrix} R & T \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

ただし $\mathbf{0}$ は 1×3 のゼロベクトル

- 外部パラメータ行列:

$$D' = [\, R \quad | \quad T \,]$$

画像座標



- コンピュータに取り込まれるときの座標 u, v と画像平面上の座標 x, y はことなる.
  - 光軸 (カメラ座標の z 軸) は画像面の中心を通らない
  - 画像面は厳密には $x - y$ 平面と平行ではない.
  - 画像座標 (u, v) でのスケールとカメラ座標 (x, y, z) のスケールがことなる.
- 画像面上の座標

$$
\begin{aligned}
u &= fk_u \frac{x + y \cot \phi}{z} + u_0 \\
v &= fk_v \frac{y}{z \sin \phi} + v_0
\end{aligned}
$$

となる. f は焦点距離.

- 理想的なピンホールモデル:

$$\phi = \pi/2, k_u = k_v = 1, u_0 = v_0 = 0$$

カメラキャリブレーション

- **内部パラメータ:**

$$
\begin{aligned}
u &= fk_u \frac{x + y \cot\phi}{z} + u_0 \\
v &= fk_v \frac{y}{z \sin\phi} + v_0
\end{aligned}
$$

すなわち

$$
w \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} {}^cX \\ {}^cY \\ {}^cZ \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} fk_u & fk_u \cot\phi & u_0 & 0 \\ 0 & fk_v / \sin\phi & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

- **外部パラメータ:**

$$
v = D^{-1} V
$$

すなわち

$$
\begin{bmatrix} {}^cX \\ {}^cY \\ {}^cZ \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & T \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} {}^wX \\ {}^wY \\ {}^wZ \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T T \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^wX \\ {}^wY \\ {}^wZ \\ 1 \end{bmatrix}
$$

- **透視投影行列:**

$$
P = AD^{-1} = A \left[R^T \quad | \quad -R^T T \right]
$$

$$
w \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} {}^wX \\ {}^wY \\ {}^wZ \\ 1 \end{bmatrix}
$$

- **キャリブレーション:** 実際に用いるカメラについて内部パラメータ, 外部パラメータ(またはそれらをあわせた透視投影行列) を決定すること

カメラキャリブレーションアルゴリズム

P は 3×4 行列であり，その成分を

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \end{bmatrix}$$

とおく．このとき

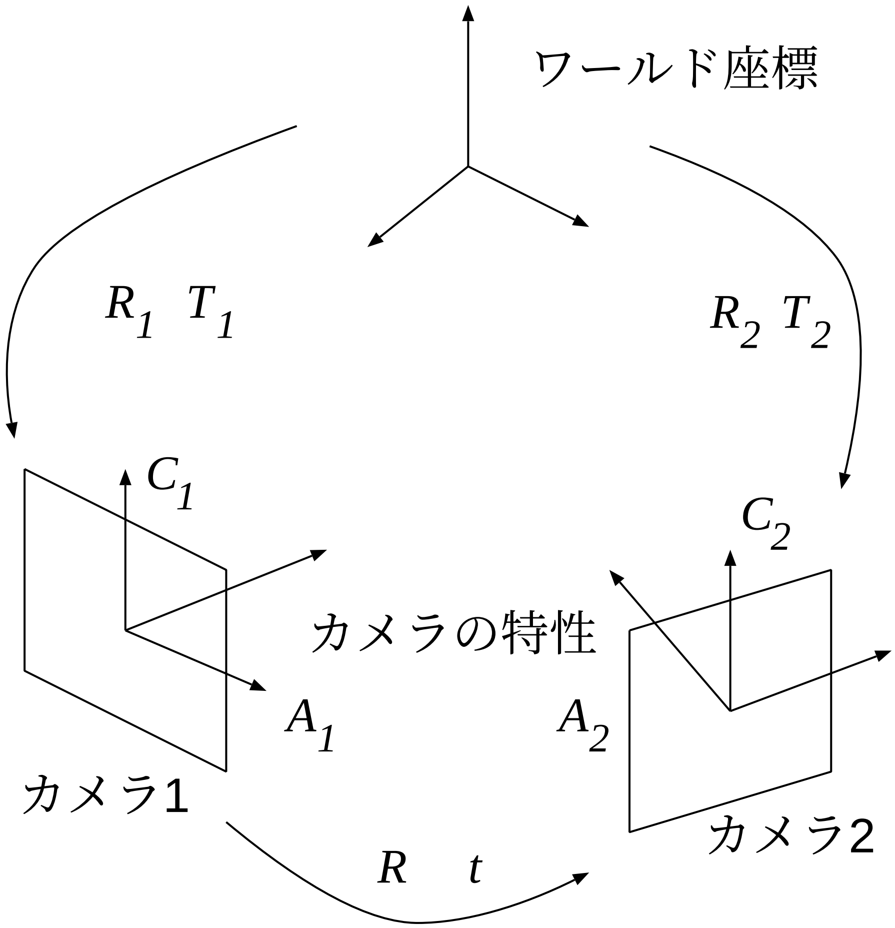
$$w \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} {}^wX \\ {}^wY \\ {}^wZ \\ 1 \end{bmatrix}$$

において w を消去して

$$\begin{aligned} u &= \frac{P_{11}{}^wX + P_{12}Y + {}^wP_{13}{}^wZ + P_{14}}{P_{31}{}^wX + P_{32}{}^wY + P_{33}{}^wZ + P_{34}} \\ v &= \frac{P_{21}{}^wX + P_{22}{}^wY + P_{23}{}^wZ + P_{24}}{P_{31}{}^wX + P_{32}{}^wY + P_{33}{}^wZ + P_{34}} \end{aligned}$$

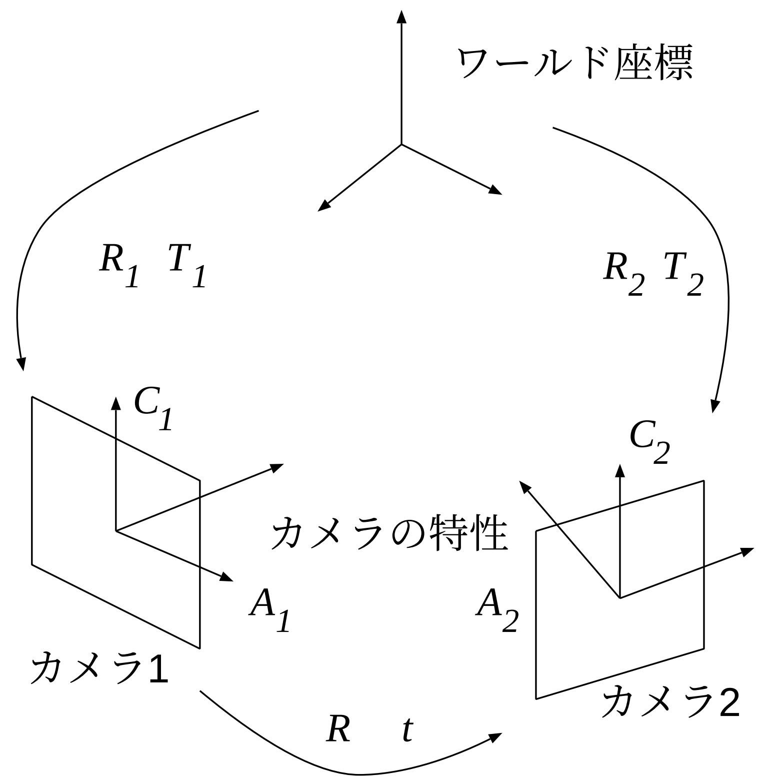
を得る．ここで P_{11} から P_{34} までを定数倍しても上式の関係は変わらないので，たとえば $P_{34} = 1$ と固定すると，未知数は 11 個になる．したがって，(u, v) の組が 6 個あれば，P の成分を決定できる．

ステレオ



- 左右に少し離れた位置に2台のカメラをおくと，それらのカメラの像は少し異る．その違いはカメラの相対的な位置と対象表面までの距離によって決まる．
- **左右のカメラの相対的な位置がわかり**，**左右のカメラで見ている対象の対応がつく**ならば，画像の違いを用いて距離が逆算できる．この原理は**三角法**と呼ばれる．

ステレオの原理

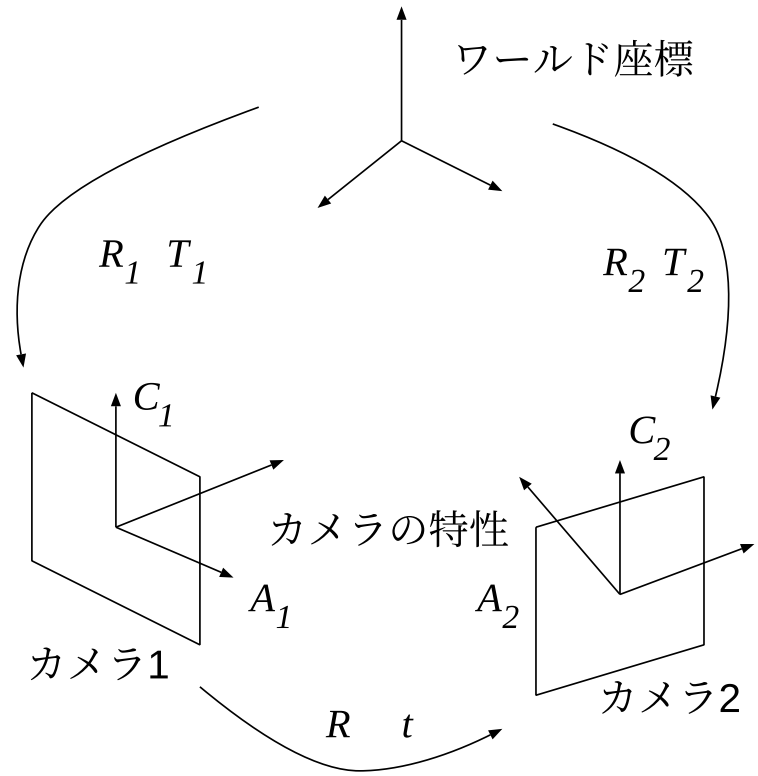


ふたつのカメラをカメラ 1 とカメラ 2 とする．空間の注目する点のワールド座標での位置を (X, Y, Z) とする．この点のカメラ $1, 2$ における画像座標を $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ とおく．また，それぞれのカメラの透視投影行列を P_1, P_2 とする．このとき，

$$w_i \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ 1 \end{bmatrix} = P_i \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

が成り立つ．したがって，P_1, P_2, w_1, w_2 が既知であれば，対応する画像の位置座標の組 $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ から X, Y, Z を求めることができる．

基礎方程式と基礎行列 I



- 内部パラメータ行列: A_1, A_2
- ワールド座標に対する相対的な位置・姿勢: $(R_1, T_1), (R_2, T_2)$
- カメラ 1 を基準としたカメラ 2 への回転と並進:

$$R = R_1^T R_2, \quad t = R_1^T (T_2 - T_1)$$

- 注目点の位置: $M = (X, Y, Z, 1)^T$
- カメラの画像面上における注目点の位置:

$$m_1 = (u_1, v_1, 1)^T, m_2 = (u_2, v_2, 1)^T$$

つまり

$$\begin{aligned} w_1 m_1 &= A_1 [\, R_1^T \quad | \quad -R_1^T T_1 \,] M \\ w_2 m_2 &= A_2 [\, R_2^T \quad | \quad -R_2^T T_2 \,] M \end{aligned}$$

基礎方程式と基礎行列 II

- カメラの画像面上における注目点の位置:

$$\begin{aligned} w_1 m_1 &= A_1 \, [\, R_1^T \quad | \quad -R_1^T T_1 \,] \, M \\ w_2 m_2 &= A_2 \, [\, R_2^T \quad | \quad -R_2^T T_2 \,] \, M \end{aligned}$$

  書き直すと

$$\begin{aligned} w_1 (A_1 R_1^T)^{-1} m_1 &= M - T_1 \\ w_2 (A_2 R_2^T)^{-1} m_2 &= M - T_2 \end{aligned}$$

  両式から M を消去すると

$$w_1 R_1 A_1^{-1} m_1 - w_2 R_2 A_2^{-1} m_2 = T_2 - T_1$$

  ゆえに

$$w_1 A_1^{-1} m_1 - w_2 R A_2^{-1} m_2 = t$$

- 3 本のベクトル $A_1^{-1} m_1$, $R A_2^{-1} m_2$, t は同一平面上
- $A_1^{-1} m_1$ と $t \wedge (R A_2^{-1} m_2)$ は直交 ($\wedge$ はベクトルの外積)
- ベクトル t に対して $t \wedge x = T x$ となる歪対称行列 T を導入
- **基礎方程式** (fundamental equation):

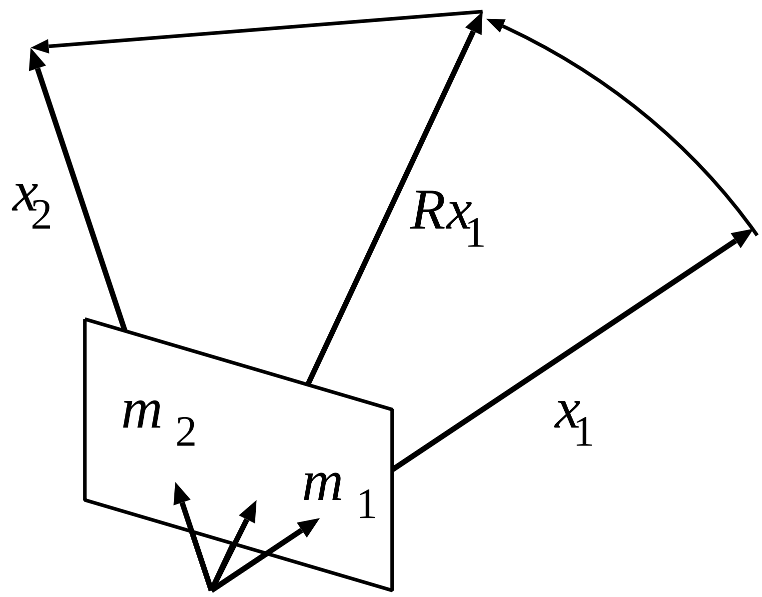
$$m_1^T (A_1^{-1})^T T R A_2^{-1} m_2 = 0$$

  または

$$m_1^T F m_2 = 0, \qquad F = (A_1^{-1})^T T R A_2^{-1}$$

  F を**基礎行列** (fundamental matrix) という

エピポーラ幾何



ひとつのカメラが移動しながら画像をとる場合や，カメラは固定して対象が移動する場合は，まったく同じ内部パラメータのカメラ2台によるステレオとみなすことができ，そのときは基本行列(essential matrix)

$$E = TR \tag{2}$$

が本質的な役割を果たす.

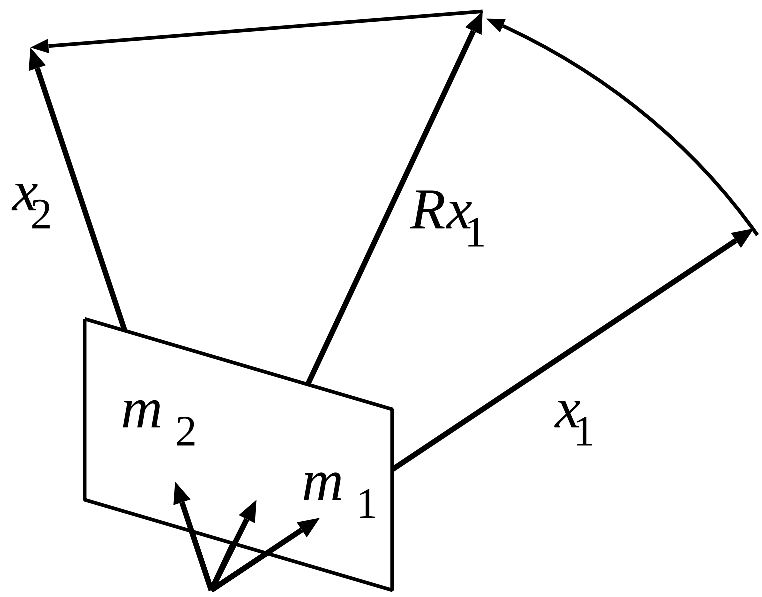
- 拘束条件 (Rm_1, m_2, t は同一平面)

$$m_2^T(t \wedge Rm_1) = 0$$

- エピポーラ条件

$$m_2 E m_1 = 0$$

８点アルゴリズム基礎式



$$x_{2i} = Rx_{1i} + t \quad \text{for} \quad i = 1, \ldots N$$

$$m = [\, uvw \,] = [\, fX/ZfY/Zf \,]$$

$$m_{2i}^T E m_{1i} = 0 \quad \text{for} \quad i = 1, \ldots N, \quad E = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix}$$

$$Be = 0 \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ \vdots \\ e_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} b_i \;=\; [\, & u_{2j}u_{1j} \quad u_{2j}v_{1j} \quad u_{2j}w_{1j} \\ & v_{2j}u_{1j} \quad v_{2j}v_{1j} \quad v_{2j}w_{1j} \\ & w_{2j}u_{1j} \quad w_{2j}v_{1j} \quad w_{2j}w_{1j} \,] \end{aligned}$$

8点アルゴリズム

1. $\{(m_{1i}, m_{2i}), i = 1, \ldots, N\}$ より B を構成する.

```
B=zeros(N,9);
for i=1:N
  u1=m1(1,i);    v1=m1(2,i);    w1=m1(3,i);
  u2=m2(1,i);    v2=m2(2,i);    w2=m2(3,i);
  B(i,:)=[u2*u1, u2*v1, u2*w1,
          v2*u1, v2*v1, v2*w1,
          w2*u1, w2*v1, w2*w1];
end
```

2. $|Be| \to \min$ となる e (ただし $|e| = 1$) を求める.

```
[U D V]=svd(B);  e=V(:,9);
```

3. e から E をつくる. ただし $\mathrm{trace} E^T E = 2$ である.

```
E=sqrt(2)*[q(1:3)'; q(4:6)'; q(7:9)'];
# residual=trace(m2'*E*m1);
```

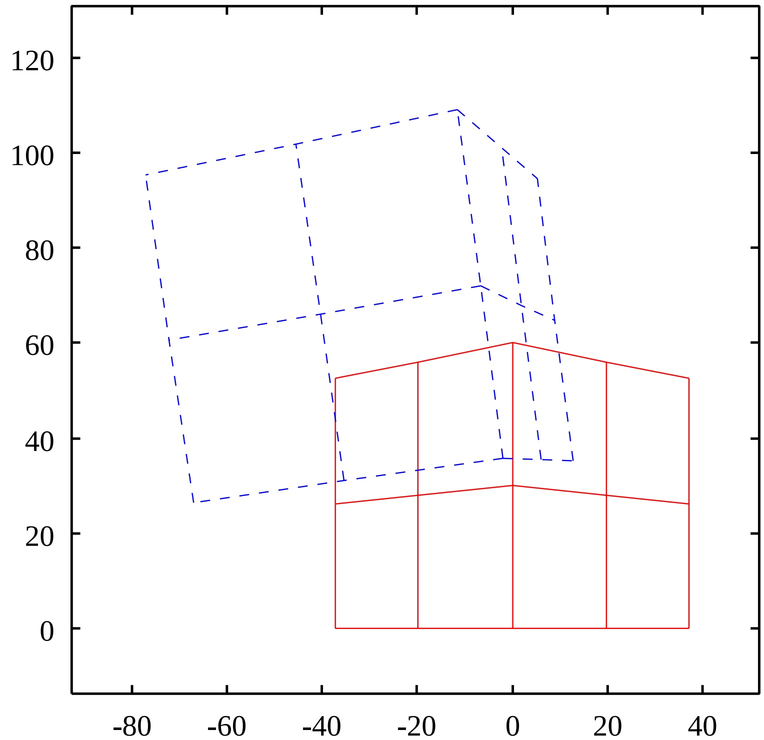
4. 歪対称行列 T と回転行列 R を用いて $\hat{E} = TR$ をみたす $\hat{E}$ のうち $|\hat{E} - E|$ を最小とする $\hat{E}$ を求める.

```
[U D V]=svd(E);
D=diag((D(1)+D(2))/2, (D(1)+D(2))/2, 0);
hatE=U*D*V';
```

5. $\hat{E}$ を R と T に分解する.

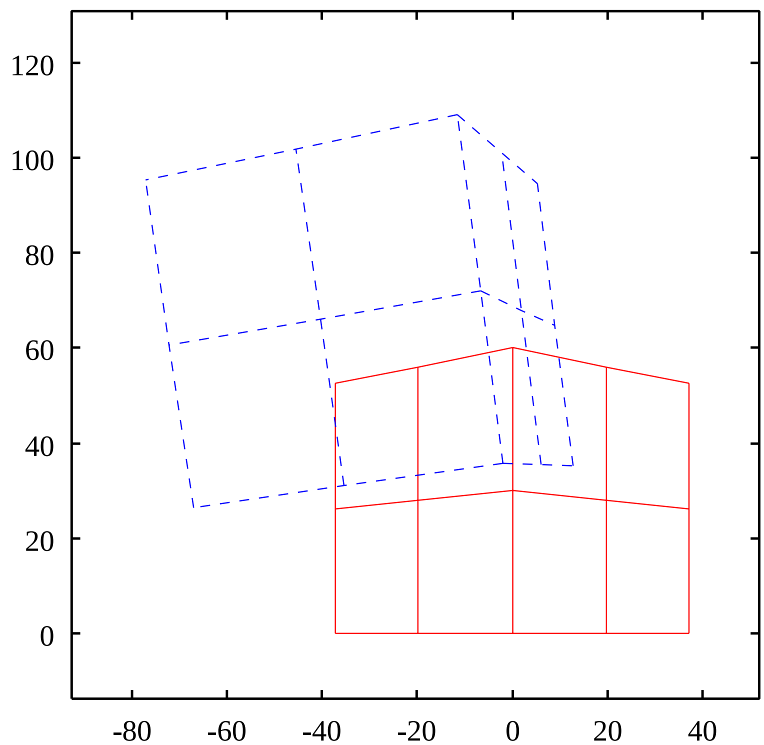
```
[U, D, V]=svd(hatE);
t=U(:,3);

Rz=[0 1 0; -1 0 0;0 0 1];
R1=U*Rz*V';
R2=U*Rz'*V';
```

8点アルゴリズムシミュレーション



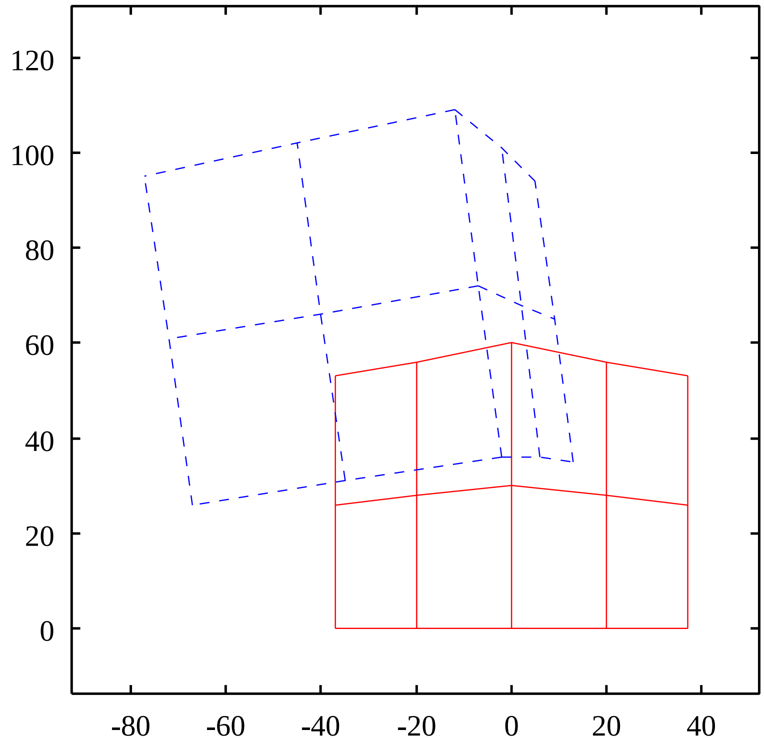
- 15点観測
- $f = -3;\ noizelevel = 0.3;\ rpy = [10\ 30\ 5];\ t = [50\ 10\ 3];$
- $D = 1000;\ objsize = 100$
- 画面離散化
- ノイズ
- 正規化

離散化なしノイズなし正規化なし



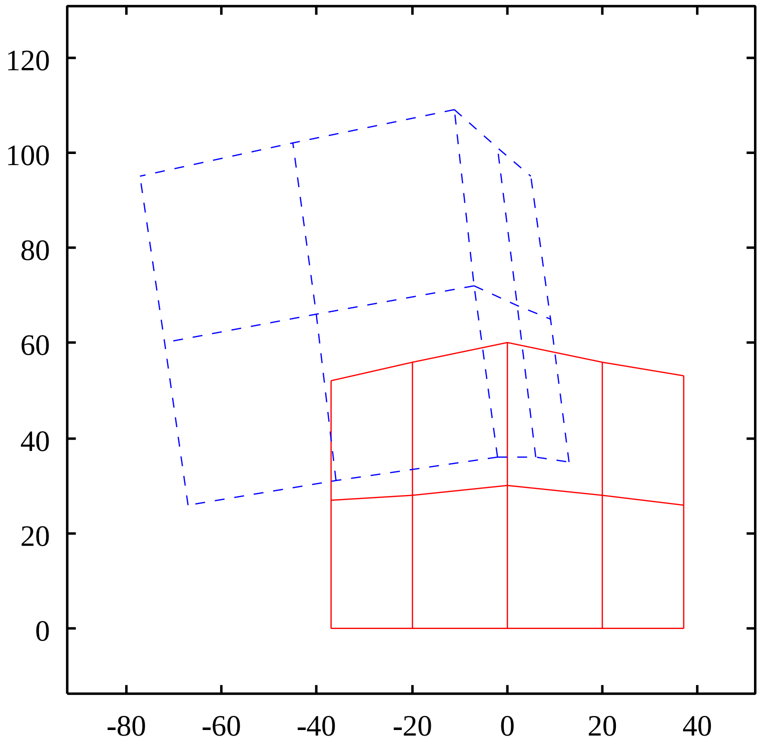

```
Essential Matrix:
  -0.11  -0.04   0.17
   0.54  -0.08  -0.81
  -0.02   0.99  -0.10
R:                            Re:
   0.85  -0.13   0.51            0.85  -0.13   0.51
   0.15   0.99   0.00            0.15   0.99   0.00
  -0.50   0.08   0.86           -0.50   0.08   0.86
rpy:                          rpye:
   0.17   0.52   0.09            0.17   0.52   0.09
t:
   5e+02 1e+02     30
normlized t:                  te:
  0.98    0.20   0.06            0.98   0.20   0.06
```

離散化ありノイズなし正規化なし



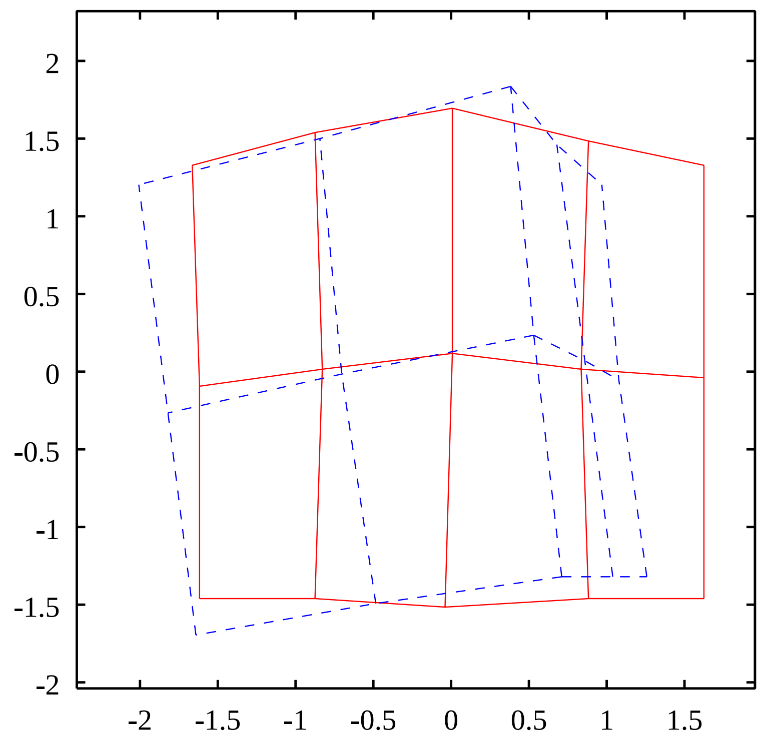

```
Essential Matrix:
  -0.17  -0.27   0.15
   0.71  -0.00  -0.72
   0.01   0.92  -0.09
R:                            Re:
   0.85  -0.13   0.51            0.86  -0.16   0.48
   0.15   0.99   0.00            0.15   0.99   0.06
  -0.50   0.08   0.86           -0.48   0.02   0.88
rpy:                          rpye:
   0.17   0.52   0.09            0.17   0.50   0.03
t:
   5e+02 1e+02     30
normlized t:                  te:
  0.98    0.20   0.06            0.94   0.19   0.28
```

離散化ありノイズあり正規化なし



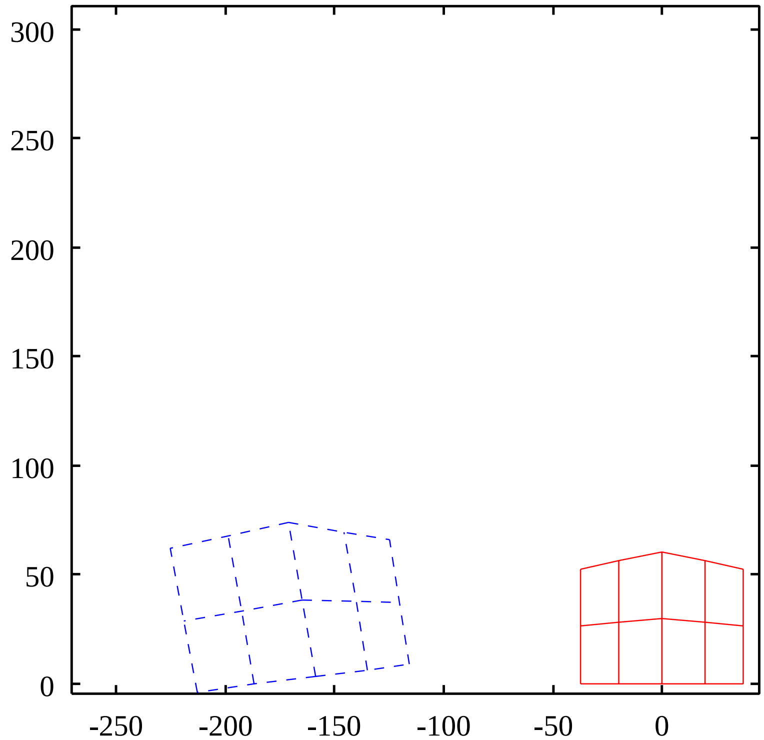

```
Essential Matrix:
  -0.01   0.15   0.18
   0.44  -0.12  -0.85
  -0.04   1.01  -0.10
R:                           Re:
   0.85  -0.13   0.51           0.83  -0.10   0.56
   0.15   0.99   0.00           0.14   0.99  -0.03
  -0.50   0.08   0.86          -0.55   0.10   0.83
rpy:                         rpye:
   0.17   0.52   0.09           0.17   0.58   0.12
t:
   5e+02 1e+02     30
normlized t:                 te:
  0.98    0.20   0.06           0.98   0.18  -0.12
```

離散化ありノイズあり正規化あり



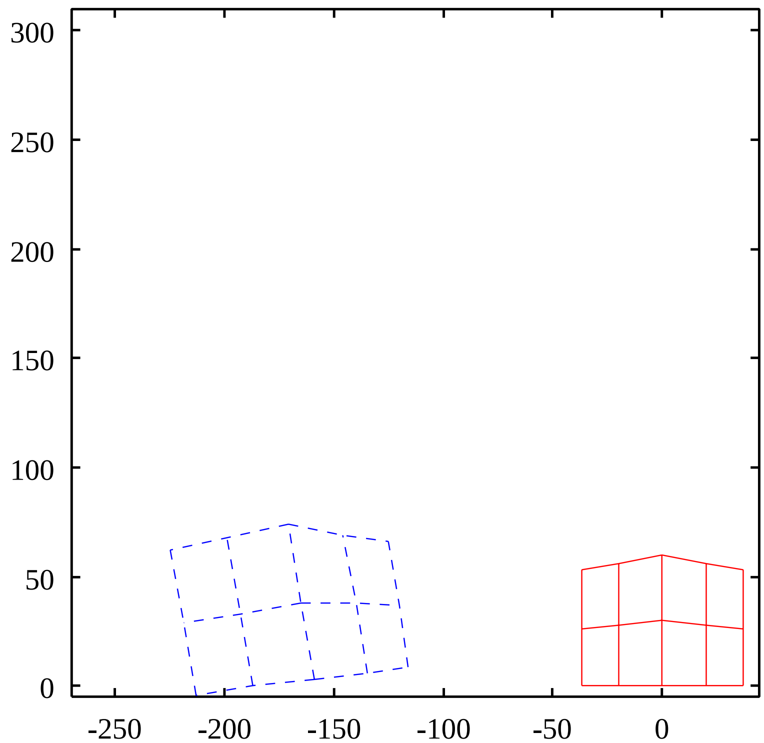

```
Essential Matrix:
   0.22   0.16  -0.20
  -0.53   0.05   0.79
   0.05  -0.98   0.10
R:                            Re:
   0.85  -0.13   0.51            0.87  -0.21   0.44
   0.15   0.99   0.00            0.20   0.98   0.06
  -0.50   0.08   0.86           -0.44   0.04   0.90
rpy:                          rpye:
   0.17   0.52   0.09            0.23   0.46   0.04
t:
   5e+02 1e+02     30
normlized t:                  te:
  0.98    0.20   0.06            0.95   0.28   0.16
```

離散化なしノイズなし正規化なし



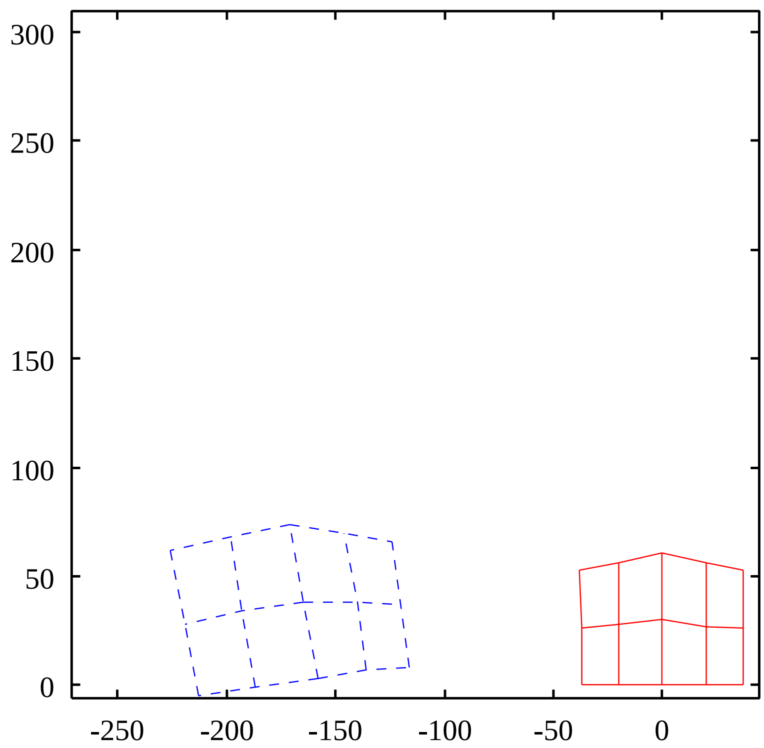

```
Essential Matrix:
  -0.11  -0.04   0.17
   0.54  -0.08  -0.81
  -0.02   0.99  -0.10
R:                          Re:
   0.85  -0.13   0.51          0.85  -0.13   0.51
   0.15   0.99   0.00          0.15   0.99   0.00
  -0.50   0.08   0.86         -0.50   0.08   0.86
rpy:                        rpye:
   0.17   0.52   0.09          0.17   0.52   0.09
t:
     50     10      3
normlized t:                te:
  0.98    0.20   0.06          0.98   0.20   0.06
```

離散化ありノイズなし正規化なし



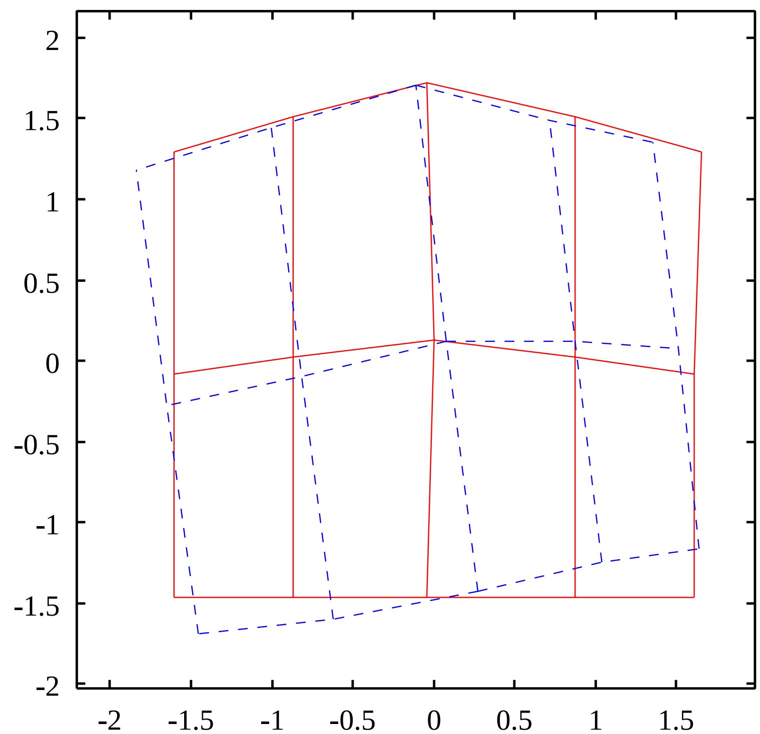

```
Essential Matrix:
   0.07    0.80    0.06
  -0.98    0.14    0.13
  -0.15   -0.56   -0.03
R:                            Re:
   0.85   -0.13    0.51          0.87   -0.12    0.48
   0.15    0.99    0.00          0.14    0.99   -0.01
  -0.50    0.08    0.86         -0.47    0.08    0.88
rpy:                          rpye:
   0.17    0.52    0.09          0.17    0.50    0.03
t:
   5e+02 1e+02      30
normlized t:                  te:
  0.98     0.20    0.06          0.58   -0.08    0.81
```

離散化ありノイズあり正規化なし




```
Essential Matrix:
   0.12    0.91    0.06
  -0.98    0.15   -0.06
  -0.13   -0.40   -0.03
R:                               Re:
   0.85   -0.13    0.51             0.93   -0.09   -0.36
   0.15    0.99    0.00             0.15    0.98    0.14
  -0.50    0.08    0.86            -0.34    0.18   -0.92
rpy:                             rpye:
   0.17    0.52    0.09             0.16    0.34   -0.19
t:
   5e+02 1e+02      30
normlized t:                     te:
  0.98     0.20    0.06            -0.41    0.07   -0.91
```

離散化ありノイズあり正規化あり




```
Essential Matrix:
   0.13   0.30  -0.06
  -0.74   0.14   0.66
  -0.11  -0.93   0.04
R:                           Re:
   0.85  -0.13   0.51           0.85  -0.19   0.50
   0.15   0.99   0.00           0.21   0.98   0.02
  -0.50   0.08   0.86          -0.49   0.09   0.87
rpy:                         rpye:
   0.17   0.52   0.09           0.24   0.51   0.10
t:
   5e+02 1e+02     30
normlized t:                 te:
  0.98    0.20   0.06           0.94   0.09   0.32
```