最小2乗法

- 冗長決定系において誤差の2乗和を最小とする解法

  Given A and $\boldsymbol{y}$, find $\boldsymbol{x}$ s.t. $\min\limits_{x \in R^n} \|\boldsymbol{y} - A\boldsymbol{x}\|^2 \quad (A : m \times n, m > n)$

  – 冗長決定系: 未知数の数より方程式の数の方が多い連立方程式系 $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$

  – (A がフルランクのとき) 解:

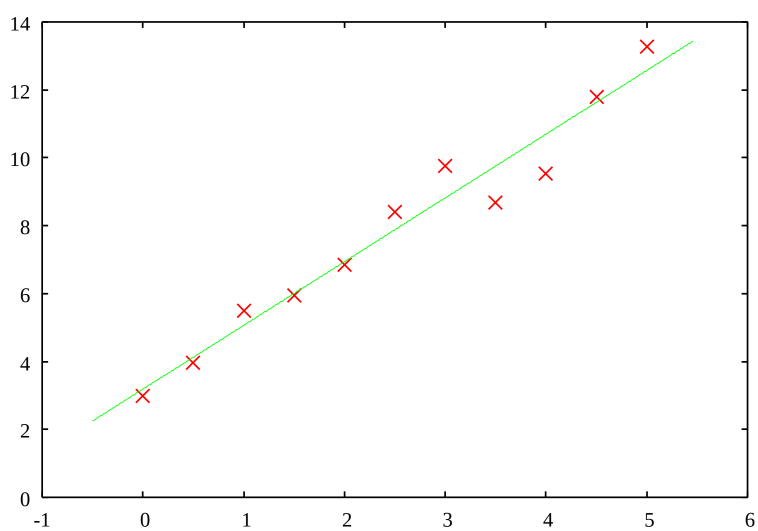
$$\boldsymbol{x} = A^{\dagger}\boldsymbol{y} = (A^T A)^{-1} A^T \boldsymbol{y} \qquad A^{\dagger} : A \text{の疑似逆行列}$$

- 例 (直線の当てはめ): Given x_i and y_i, find a, b s.t.,

$$\min_{a,b} \sum_{i=1}^{N} (y_i - (ax_i + b))^2 = \min_{\boldsymbol{x}} \|\boldsymbol{y} - A\boldsymbol{x}\|^2$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_N & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

```
x_i: 0.000  0.500  1.000  1.500  2.000  2.500  3.000  3.500  4.000  4.500  5.000
y_i: 2.991  3.973  5.487  5.938  6.848  8.397  9.757  8.690  9.535 11.799 13.268
a:   1.877     b:  3.187
```



疑似逆行列

- $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ において A がフルランクでない場合
  - 最適解: $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ をみたすすべての解のうち，最小の長さを持つ
  - $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ をみたすひとつの解を $\boldsymbol{x}_0$ とする．
  - A の行空間を $\mathrm{Im}A^T$，零空間を $\mathrm{Ker}A$ とすると任意のベクトルは行空間上への射影と零空間上への射影とに分解できるから，$\boldsymbol{x}_0$ の分解を

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}_r + \boldsymbol{w}$$

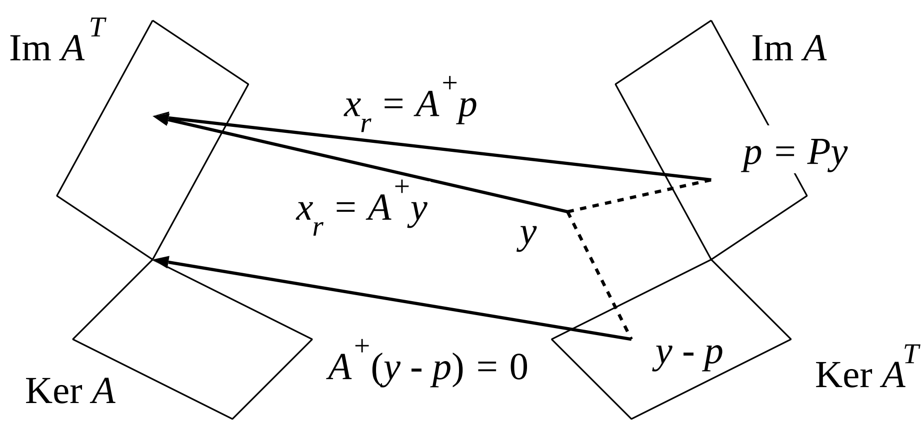
    とする．
  - 任意の $\boldsymbol{w} \in \mathrm{Ker}A$ に対し $A\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ が成り立つから，

$$A\boldsymbol{x}_0 = A(\boldsymbol{x}_r + \boldsymbol{w}) = A\boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{y}$$

  - Pythagoras の定理より

$$\|\boldsymbol{x}_0\|^2 = \|\boldsymbol{x}_r + \boldsymbol{w}\|^2 = \|\boldsymbol{x}_r\|^2 + \|\boldsymbol{w}\|^2$$

  - したがって，最適解は $\boldsymbol{x}_r \in \mathrm{Im}A^T$
- $\boldsymbol{x}_r = A^+\boldsymbol{y}$ とする A^+ の持つ性質



疑似逆行列の例

- 例 1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  – まず $\boldsymbol{y} = [y_1,\ y_2,\ y_3]^T$ とすると，$\boldsymbol{p} = P\boldsymbol{y} = [y_1,\ y_2,\ 0]^T$

  – 次に $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}$ を解くと $\boldsymbol{x} = [y_1,\ y_2,\ x_3]^T$ (x_3 は任意)

  – $\boldsymbol{x}$ の長さを最小にするには $x_3 = 0$

  – ゆえに

$$A^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 例 2:

$$A = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (\mu_1 > 0,\ \mu_2 > 0)$$

  – $\boldsymbol{y} = [y_1,\ y_2,\ y_3]^T$ とすると，$\boldsymbol{p} = P\boldsymbol{y} = [y_1,\ y_2,\ 0]^T$

  – $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}$ を解くと $\boldsymbol{x} = [y_1/\mu_1,\ y_2/\mu_2,\ x_3,\ x_4]^T$

  – $\boldsymbol{x}$ の長さを最小にするには $x_3 = x_4 = 0$

  – ゆえに

$$A^+ = \begin{bmatrix} \mu_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

疑似逆行列と特異値分解

- **特異値分解:** 任意の$m \times n$行列は$A = U\Sigma V^T$に分解することができる．ここでUは$m \times m$直交行列，Vは$n \times n$直交行列，Σは$m \times n$の対角行列である．
  - Σの対角要素は零を含むときがある

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

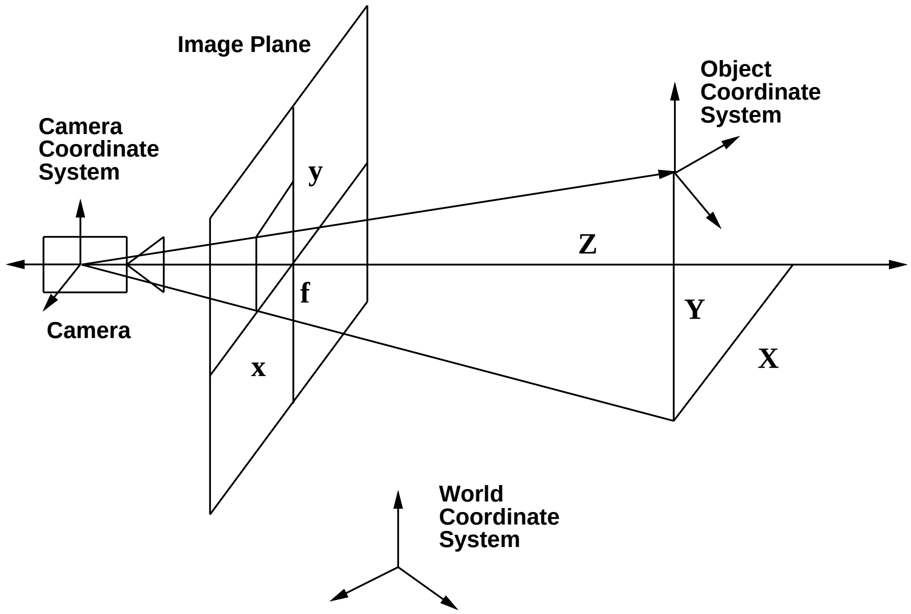
- **疑似逆行列の公式:** $A^+ = V\Sigma^+ U^T$

$$\Sigma^+ = \begin{bmatrix} \mu_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_r^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  - まず$\|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = \|U\Sigma V^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = \|\Sigma V^T\boldsymbol{x} - U^T\boldsymbol{y}\|$
  - 次に$\boldsymbol{z} = V^T\boldsymbol{x} = V^{-1}\boldsymbol{x}$を導入すと，$\|\Sigma\boldsymbol{z} - U^T\boldsymbol{y}\|$を最小化する解は$\boldsymbol{z} = \Sigma^+U^T\boldsymbol{y}$
  - したがって，

$$\boldsymbol{x} = V\boldsymbol{z} = V\Sigma^+U^T\boldsymbol{y}$$

ビジョンシステムのキャリブレーション



- **キャリブレーション:** 対象位置${}^W\boldsymbol{T}_O$，物体形状${}^O\boldsymbol{r}_i$，および物体画像x_i, y_i (for $i = 1, \ldots, N$)が既知とする．カメラのパラメータ$P = A({}^W\boldsymbol{T}_C)^{-1}$を求めよ．

$$s_i \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{bmatrix} = P {}^W\boldsymbol{T}_O \begin{bmatrix} {}^O\boldsymbol{r}_i \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Pのサイズは3×4であり，自由度は12．ただし，$P' = \alpha P$に対しても上式は成立するため，本質的には11自由度.
- 1点の観測につき2自由度の情報が得られるため，6点を観測すればPは決定可能.
- しかしノイズの影響などにより，精度よく推定するためには数十程度の点を計測する必要があり，現在もまだアクティブな研究対象である.

キャリブレーションアルゴリズム

- キャリブレーション: Find P s.t.

$$\min_{P \in R^{3\times 4}} \sum_i \left\| s_i \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{bmatrix} - P \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \\ 1 \end{bmatrix} \right\|^2$$

- $P = [P_{ij}], \boldsymbol{P} = [P_{11}, P_{12}, \ldots, P_{34}]$ ただし $P_{34} = 1$

$$\begin{aligned} s_1 x_1 \;&-\; P_{11}X_1 + P_{12}Y_1 + P_{13}Z_1 + P_{14} \\ s_1 y_1 \;&-\; P_{21}X_1 + P_{22}Y_1 + P_{23}Z_1 + P_{24} \\ s_1 \;&-\; P_{31}X_1 + P_{32}Y_1 + P_{33}Z_1 + 1 \\ 0 \;&-\; \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1X_1 & x_1Y_1 & x_1Z_1 & x_1 \end{bmatrix} \boldsymbol{P} \\ 0 \;&-\; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 & y_1X_1 & y_1Y_1 & y_1Z_1 & y_1 \end{bmatrix} \boldsymbol{P} \end{aligned}$$

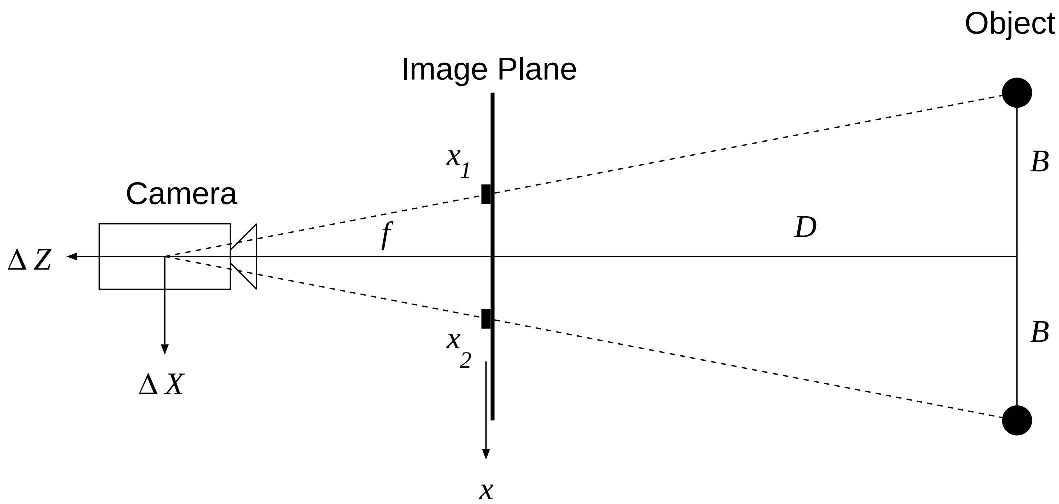
- $\hat{\boldsymbol{P}} = [P_{11}, P_{12}, \ldots, P_{33}]$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1X_1 & x_1Y_1 & x_1Z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 & y_1X_1 & y_1Y_1 & y_1Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_2X_2 & x_2Y_2 & x_2Z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_2 & Y_2 & Z_2 & 1 & y_2X_2 & y_2Y_2 & y_2Z_2 \\ & & & & & \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_N & Y_N & Z_N & 1 & y_NX_N & y_NY_N & y_NZ_N \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{P}}$$

$$\boldsymbol{y} \;-\; A\boldsymbol{x}$$

- 最小2乗問題

$$\min_{\boldsymbol{x}} \|\boldsymbol{y} - A\boldsymbol{x}\|^2$$



対象物上の２点を観測

- ２点の像

$$\xi = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad x_1 = -f\frac{B}{D}, \qquad x_2 = f\frac{B}{D}$$

- カメラの自由度

$$p = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Z \end{bmatrix}$$

- カメラが動くことによる像の変位

$$\frac{\partial \xi}{\partial p} = \begin{bmatrix} -\frac{f}{D} & \frac{fB}{D^2} \\ -\frac{f}{D} & -\frac{fB}{D^2} \end{bmatrix}$$

- **ヤコビ行列**

$$J = \frac{\partial \xi}{\partial p}$$

感度解析の例

- たとえば $D = 1000, B = 100, f = 100$ のとき

$$J = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.01 \\ -0.1 & -0.01 \end{bmatrix}$$

- **特異値分解**

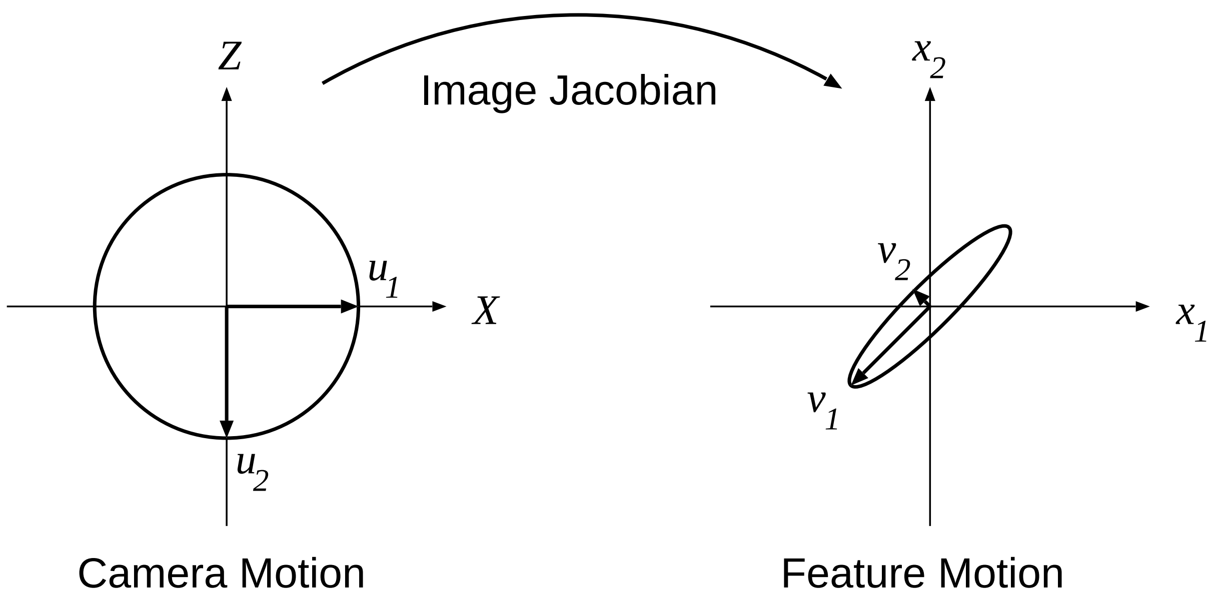
$$J = U\Sigma V^T$$

$$U = \begin{bmatrix} -0.707 & -0.707 \\ -0.707 & 0.707 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 0.141 & 0.0 \\ 0.0 & 0.014 \end{bmatrix}, \quad V^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

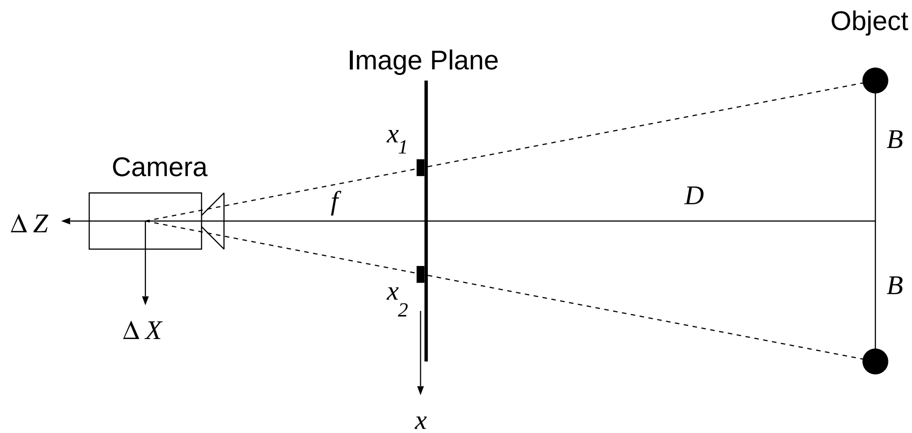
- かたい方向・柔らかい方向

$$JV = UD, \qquad Jv_1 = \sigma_1 u_1, \qquad Jv_2 = \sigma_2 u_2$$

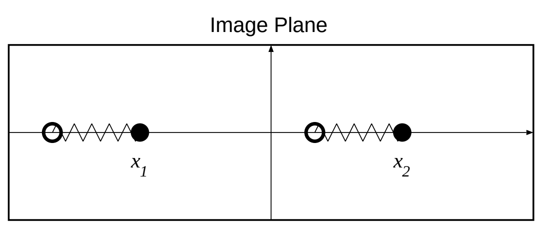
- カメラの運動 $\longrightarrow$ 特徴量の運動



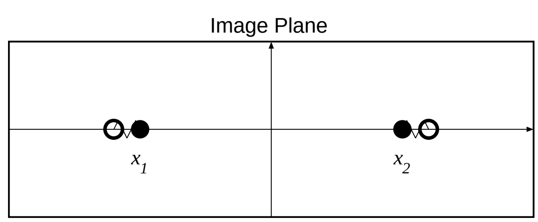
感度の解釈



- カメラの u_1 $(=X)$ 方向の運動は大きな画像の変化 $(v_1$ 方向$)$



- u_2 $(=-Z)$ 方向の運動は小さな画像の変化 $(v_2$ 方向$)$



- ビジュアルサーボは画像偏差に基づいてアクチュエータを動かすので，X 方向にはかたく，Z 方向には柔らかくなる．
- ヤコビ行列の特異値分解を用いることで制御システムの持つ特性を評価できる．