パーセプトロン(補足)

- 学習パターン全体の集合: $\mathcal{X}_i (i = 1, \cdots, c)$
- **学習**: $\mathcal{X}_i$ に属するすべての $\boldsymbol{x}$ に対して

$$g_i(\boldsymbol{x}) > g_j(\boldsymbol{x}) \quad (j = 1, \cdots, c,\ j \neq i)$$

が成り立つように重み $\boldsymbol{w}$ を決定すること.

- 学習アルゴリズム
  1. 重みベクトル $\boldsymbol{w}$ の初期値を適当に設定する.
  2. $\mathcal{X}$ のなかから学習パターンをひとつ選ぶ.
  3. 識別関数
  $$g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{x}$$
  によって識別を行い,誤識別を生じた場合 (ω_i に属するパターンを ω_j と誤ったとする) のみ次式により重みベクトルを修正する.
  $$\begin{aligned} \boldsymbol{w}'_i &= \boldsymbol{w}_i + \rho \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{w}'_j &= \boldsymbol{w}_j - \rho \boldsymbol{x} \end{aligned}$$
  4. 上の処理,2, 3 を $\mathcal{X}$ の全パターンに対して繰り返す.
  5. $\mathcal{X}$ の全パターンを正しく識別できたら終了,誤りがあるときには 2 に戻る.

1次元の例(補足)

- カテゴリ: $\omega_1 = \{x : -2/5 < x\},\ \omega_2 = \{x : x < -2/5\}$
- 学習パターン:

pattern	value	categoly
x_1	-0.2	ω_1
x_2	-1.5	ω_2
x_3	-1.0	ω_2
x_4	0.2	ω_1
x_5	1.2	ω_1
x_6	-0.5	ω_2

- 例: $\boldsymbol{w} = (2, -7), \rho = 1$

$$
\begin{aligned}
g(x_1) &= 2 - 7(-0.2) = 3.4, \boldsymbol{w} = (2, -7) \\
g(x_2) &= 2 - 7(-1.5) = 12.5, \boldsymbol{w} = (2, -7) - (1, -1.5) = (1, -5.5) \\
g(x_3) &= 1 - 5.5(-1.0) = 6.5, \boldsymbol{w} = (1, -5.5) - (1, -1.0) = (0, -4.5) \\
g(x_4) &= 0 - 4.5(0.2) = -0.9, \boldsymbol{w} = (0, -4.5) + (1, 0.2) = (1, -4.3) \\
g(x_5) &= 1 - 4.3(1.2) = -4.16, \boldsymbol{w} = (1, -4.3) + (1, 1.2) = (2, -3.1) \\
g(x_6) &= 2 - 3.1(-0.5) = 3.55, \boldsymbol{w} = (2, -3.1) - (1, -0.5) = (1, -2.6) \\
\vdots &\quad \vdots \\
g(x_1) &= 0 + 2.3(-0.2) = -0.46, \boldsymbol{w} = (0, 2.3) + (1, -0.2) = (1, 2.1) \\
g(x_2) &= 1 + 2.1(-1.5) = -2.15, \boldsymbol{w} = (1, 2.1) \\
g(x_3) &= 1 + 2.1(-1.0) = -1.1, \boldsymbol{w} = (1, 2.1) \\
g(x_4) &= 1 + 2.1(0.2) = 1.42, \boldsymbol{w} = (1, 2.1) \\
g(x_5) &= 1 + 2.1(1.2) = 3.52, \boldsymbol{w} = (1, 2.1) \\
g(x_6) &= 1 + 2.1(-0.5) = -0.05, \boldsymbol{w} = (1, 2.1) \\
g(x_1) &= 1 + 2.1(-0.2) = 0.58, \boldsymbol{w} = (1, 2.1)
\end{aligned}
$$

１次元の例 (２つの識別関数)

- 学習パターン:

pattern	value	categoly
x_1	-0.2	ω_1
x_2	-1.5	ω_2
x_3	-1.0	ω_2
x_4	0.2	ω_1
x_5	1.2	ω_1
x_6	-0.5	ω_2

```
N i o:  g1(x)  g2(x)  w1(1)  w1(2)  w2(1)  w2(2)
------------------------------------------------
1 1 1:  3.400  0.000  2.000 -7.000  0.000  0.000
1 2 2: 12.500  0.000  2.000 -7.000  0.000  0.000
1 3 2:  6.500  2.500  1.000 -5.500  1.000 -1.500
1 4 1: -0.900  1.500  0.000 -4.500  2.000 -2.500
1 5 1: -4.160 -2.240  1.000 -4.300  1.000 -2.700
1 6 2:  3.550  1.950  2.000 -3.100  0.000 -3.900
2 1 1:  1.520  1.880  1.000 -2.600  1.000 -4.400
2 2 2:  6.200  6.300  2.000 -2.800  0.000 -4.200
2 3 2:  4.800  4.200  2.000 -2.800  0.000 -4.200
2 4 1:  0.640 -0.040  1.000 -1.800  1.000 -5.200
2 5 1: -1.160 -5.240  1.000 -1.800  1.000 -5.200
2 6 2:  1.900  3.600  1.000 -1.800  1.000 -5.200
3 1 1:  1.360  2.040  1.000 -1.800  1.000 -5.200
3 2 2:  5.000  7.500  2.000 -2.000  0.000 -5.000
3 3 2:  4.000  5.000  2.000 -2.000  0.000 -5.000
3 4 1:  1.600 -1.000  2.000 -2.000  0.000 -5.000
3 5 1: -0.400 -6.000  2.000 -2.000  0.000 -5.000
3 6 2:  3.000  2.500  2.000 -2.000  0.000 -5.000
4 1 1:  1.300  2.100  1.000 -1.500  1.000 -5.500
4 2 2:  4.550  7.950  2.000 -1.700  0.000 -5.300
4 3 2:  3.700  5.300  2.000 -1.700  0.000 -5.300
4 4 1:  1.660 -1.060  2.000 -1.700  0.000 -5.300
4 5 1: -0.040 -6.360  2.000 -1.700  0.000 -5.300
4 6 2:  2.850  2.650  2.000 -1.700  0.000 -5.300
5 1 1:  1.240  2.160  1.000 -1.200  1.000 -5.800
5 2 2:  4.100  8.400  2.000 -1.400  0.000 -5.600
5 3 2:  3.400  5.600  2.000 -1.400  0.000 -5.600
5 4 1:  1.720 -1.120  2.000 -1.400  0.000 -5.600
5 5 1:  0.320 -6.720  2.000 -1.400  0.000 -5.600
5 6 2:  2.700  2.800  2.000 -1.400  0.000 -5.600
6 1 1:  2.280  1.120  2.000 -1.400  0.000 -5.600
```

座標変換

- 線形変換
$$y = Ax, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$
を考える．
  - この写像の様子を図を書いて説明せよ．
  - Aの固有値，固有ベクトルを求めよ．
  - 写像において，固有値，固有ベクトルはどのような意味をもつか？
  - 行列式の意味を説明せよ．
  - 行列AをΣ_0からΣ_Aへの座標変換とみなす．それぞれの座標系でベクトル$(1,3)$を図に描け．
- Aを
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$
とする．同様にAによる線形写像を考察せよ．
- Rを2次元の回転行列
$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$
とする．同様にRによる線形写像を考察せよ．

剛体の位置と姿勢

- 3次元空間内の剛体の位置・姿勢の表現方法
  - 基準座標系: $\Sigma_A = O_A\text{–}\{X_A, Y_A, Z_A\}$
  - 剛体座標系: $\Sigma_B = O_B\text{–}\{X_B, Y_B, Z_B\}$
  - O_B の位置ベクトル: ${}^A\boldsymbol{p}_B$
  - X_B, Y_B, Z_B の方向を向く単位ベクトルを Σ_A で表したもの: ${}^A\boldsymbol{x}_B, {}^A\boldsymbol{y}_B, {}^A\boldsymbol{z}_B$

  - Σ_A から見た剛体の位置: ${}^A\boldsymbol{p}_B$
  - Σ_A から見た剛体の姿勢: $\{{}^A\boldsymbol{x}_B, {}^A\boldsymbol{y}_B, {}^A\boldsymbol{z}_B\}$

- 回転行列
  - ${}^A\boldsymbol{R}_B = [{}^A\boldsymbol{x}_B \ {}^A\boldsymbol{y}_B \ {}^A\boldsymbol{z}_B]$
  - $({}^A\boldsymbol{R}_B)^T({}^A\boldsymbol{R}_B) = \boldsymbol{I}_3$
  - $({}^A\boldsymbol{R}_B)^{-1} = ({}^A\boldsymbol{R}_B)^T$

ベクトルの表現

- Σ_A と Σ_B の原点は一致しているとする
- あるベクトル $\boldsymbol{r}$
  - Σ_A から見たとき (Σ_A での表現): ${}^A\boldsymbol{r} = [{}^Ar_x \ {}^Ar_y \ {}^Ar_z]^T$
  - Σ_B での表現: ${}^B\boldsymbol{r} = [{}^Br_x \ {}^Br_y \ {}^Br_z]^T$

$$ {}^A\boldsymbol{r} = {}^A\boldsymbol{x}_B {}^Br_x + {}^A\boldsymbol{y}_B {}^Br_y + {}^A\boldsymbol{z}_B {}^Br_z $$

$$ {}^A\boldsymbol{r} = {}^A\boldsymbol{R}_B {}^B\boldsymbol{r} $$

同様に，(Σ_A と Σ_B の立場を逆にすれば)

$$ {}^B\boldsymbol{r} = {}^B\boldsymbol{R}_A {}^A\boldsymbol{r} $$

- 上の関係は任意の $\boldsymbol{r}$ について成り立つから

$$ ({}^A\boldsymbol{R}_B)({}^B\boldsymbol{R}_A) = \boldsymbol{I}_3 $$

- Σ_A，Σ_B と原点が一致している第3の座標系 Σ_C
- $\boldsymbol{r}$ の Σ_C における表現 ${}^C\boldsymbol{r}$

$$ {}^B\boldsymbol{r} = {}^B\boldsymbol{R}_C {}^C\boldsymbol{r}, \quad {}^A\boldsymbol{r} = {}^A\boldsymbol{R}_C {}^C\boldsymbol{r} $$

$$ {}^A\boldsymbol{R}_C {}^C\boldsymbol{r} = {}^A\boldsymbol{r} = {}^A\boldsymbol{R}_B {}^B\boldsymbol{r} = {}^A\boldsymbol{R}_B {}^B\boldsymbol{R}_C {}^C\boldsymbol{r} $$

$$ {}^A\boldsymbol{R}_C = {}^A\boldsymbol{R}_B {}^B\boldsymbol{R}_C, \quad {}^A\boldsymbol{R}_B = ({}^C\boldsymbol{R}_A)^T {}^C\boldsymbol{R}_B $$

$$ {}^A\boldsymbol{R}_B = \begin{bmatrix} ({}^C\boldsymbol{x}_A)^T {}^C\boldsymbol{x}_B & ({}^C\boldsymbol{x}_A)^T {}^C\boldsymbol{y}_B & ({}^C\boldsymbol{x}_A)^T {}^C\boldsymbol{z}_B \\ ({}^C\boldsymbol{y}_A)^T {}^C\boldsymbol{x}_B & ({}^C\boldsymbol{y}_A)^T {}^C\boldsymbol{y}_B & ({}^C\boldsymbol{y}_A)^T {}^C\boldsymbol{z}_B \\ ({}^C\boldsymbol{z}_A)^T {}^C\boldsymbol{x}_B & ({}^C\boldsymbol{z}_A)^T {}^C\boldsymbol{y}_B & ({}^C\boldsymbol{z}_A)^T {}^C\boldsymbol{z}_B \end{bmatrix} $$

同次変換

- 2つの座標系Σ_A, Σ_B
- Σ_Aに対するΣ_Bの位置: ${}^A\boldsymbol{p}_B$
- Σ_Aに対するΣ_Bの姿勢: ${}^A\boldsymbol{R}_B$
- Σ_Bに関して${}^B\boldsymbol{r}$で表示された点をΣ_Aで表示

$$
{}^A\boldsymbol{r} = {}^A\boldsymbol{R}_B {}^B\boldsymbol{r} + {}^A\boldsymbol{p}_B
$$

$$
\begin{bmatrix} {}^A\boldsymbol{r} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A\boldsymbol{R}_B & {}^A\boldsymbol{p}_B \\ 0 \;\; 0 \;\; 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^B\boldsymbol{r} \\ 1 \end{bmatrix}
$$

- 同次変換行列

$$
{}^A\boldsymbol{T}_B = \begin{bmatrix} {}^A\boldsymbol{R}_B & {}^A\boldsymbol{p}_B \\ 0 \;\; 0 \;\; 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

- 同次変換

$$
{}^A\boldsymbol{r} = {}^A\boldsymbol{T}_B {}^A\boldsymbol{p}_B
$$

- 例
  - Σ_BはΣ_Aと原点が一致していて，Z_Aまわりにα回転した位置にある．このとき${}^A\boldsymbol{T}_B$を求めよ．
  - Σ_BはΣ_Aに対してY_A方向に2，Z_A方向に1だけ並進した位置にある．このとき${}^A\boldsymbol{T}_B$を求めよ．